Gegeben sind Paare von Funktionen g und f mit

a) $g(x) = x - 2$ $\quad f(x) = x^2$

b) $g(x) = -4\,x - 18$ $\quad f(x) = 2\,(x+3)^2 - 1$

c) $g(x) = \frac{1}{2}\,x + 3$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

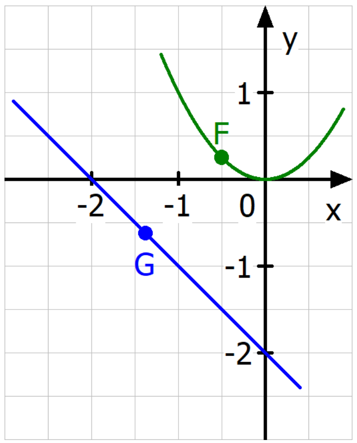
d) $g(x) = 3\,x + 7$ $\quad f(x) = x^3 - 2$

Löse die folgenden Aufgaben.

1. Gegeben sind die Funktionen g und f mit

$$g(x) = -x - 2 \quad \text{und} \quad f(x) = x^2$$

siehe die blaue Gerade bzw. die grüne Kurve in der Zeichnung.



Es soll ein Punkt F auf dem Graph $G(f)$ und ein Punkt G auf $G(g)$ so bestimmt werden, dass die Strecke

$$d = \overline{FG}$$

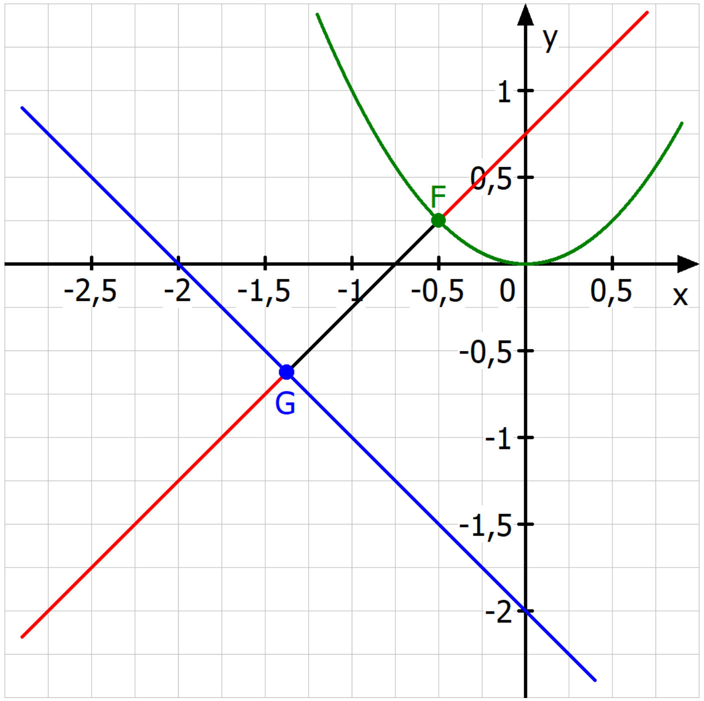
möglichst kurz wird.

Beantworte für das gegebene g und f folgende Fragen.

- Wie lauten die Koordinaten von F?
- Wie lautet die Zuordnungsvorschrift für die rote Gerade n, d.h.

$$n(x) = m\,x + b$$

welche durch F und G verläuft?
- Wie lauten die Koordinaten von G?
- Wie lang ist die Strecke $d = \overline{FG}$?



2. Löse die Aufgaben a) bis d) so wie die Aufgabe 1.

1. Lösungsidee: Ein kürzester Abstand $d = \overline{FG}$ muss von beiden Graphen rechtwinklig weggehen, d.h. $G(f)$ hat im Punkt F dieselbe Steigung wie die Gerade g. Es muss dort

$$g'(x) = f'(x)$$

gelten und diese Gleichung liefert die Koordinate x_F von F, und eingesetzt in f erhält man

$$y_F = f(x_F) \quad \Rightarrow \quad F(x_F\,;\,y_F)$$

Die Geraden g und n stehen rechtwinklig (normal) zueinander, d.h. es gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g}$$

für deren Steigungen, vergleiche FS 8.1.5. Weil der Punkt F auf der Gerade n liegt, kann man auch deren y-Achsenabschnitt b berechnen, womit

$$n(x) = m_n\,x + b$$

vollständig bestimmt ist. Der Punkt G kann als Schnittpunkt von g und n berechnet werden, d.h. es muss dort

$$g(x) = n(x)$$

gelten. Wenn man die beiden Punkte F und G kennt, liefert Pythagoras den gesuchten Abstand d.

Lösung: Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-1 = 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad x_F = -\frac{1}{2}$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = \frac{1}{4} \quad \text{sowie} \quad F\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$$

für den Anfangspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-1} = 1$$

und weil F auf n liegt auch

$$y = x + b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = x + \frac{3}{4}$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$x + \frac{3}{4} = -x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = -\frac{11}{8}$$

und damit

$$y_G = g(x_G) = -\frac{5}{8} \quad \text{sowie} \quad G\left(-\frac{11}{8}\,;\,-\frac{5}{8}\right)$$

für den Endpunkt G der Strecke d. Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{7}{8} \approx 1.24$$

die gesuchte Länge, siehe Zeichnung in der Aufgabenstellung.

2. a) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x_F = \frac{1}{2}$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = \frac{1}{4} \quad \text{sowie} \quad F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$$

für den Anfangspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{1} = -1$$

und weil F auf n liegt auch

$$y = -x + b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -x + \frac{3}{4}$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-x + \frac{3}{4} = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = \frac{11}{8}$$

und damit

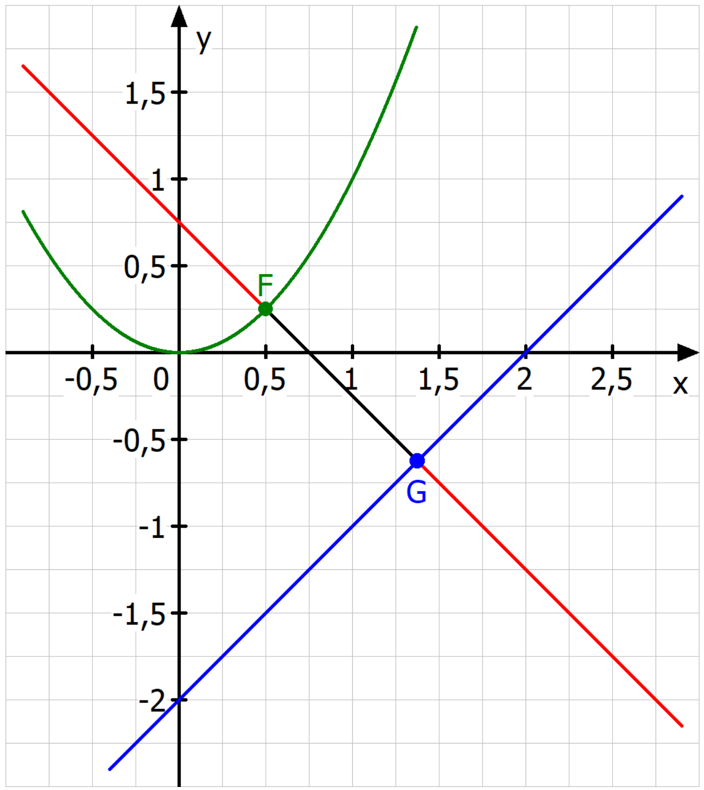
$$y_G = g(x_G) = -\frac{5}{8} \quad \text{sowie} \quad G\left(\frac{11}{8}\,;\,-\frac{5}{8}\right)$$

für den Endpunkt G der Strecke d.

Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{7}{8} \approx 1.24$$

die gesuchte Länge.



b) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-4 = 4\,x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x_F = -4$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = 1 \quad \text{sowie} \quad F\,(-4\,;\,1)$$

für den Anfangspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

und weil F auf n liegt auch

$$y = \frac{1}{4}\,x + b \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4}\,(-4) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = \frac{1}{4}\,x + 2$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$\frac{1}{4}\,x + 2 = -4\,x - 18 \quad \Leftrightarrow \quad x_G \approx -4.71$$

und damit

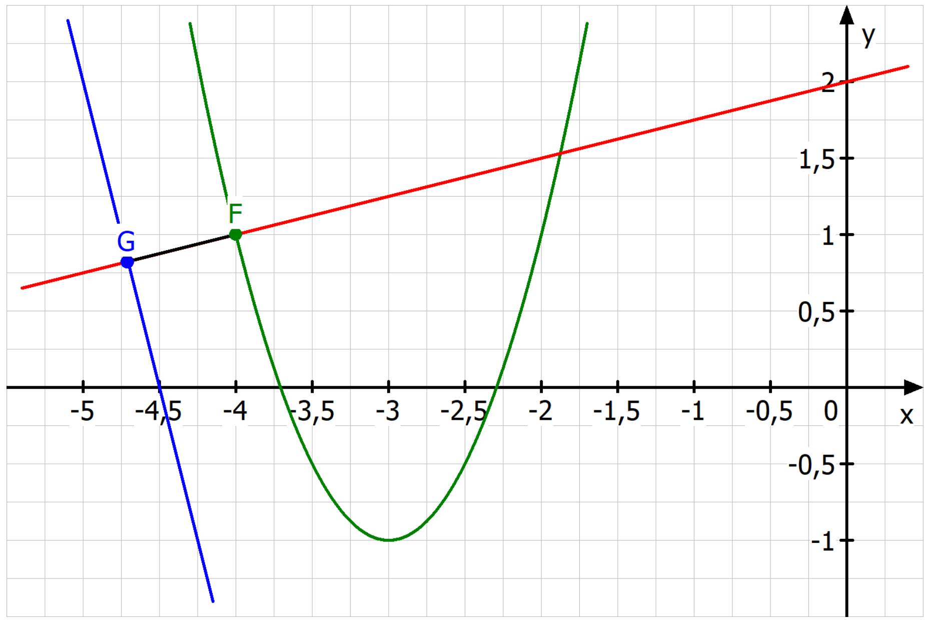
$$y_G = g(x_G) = 0.82 \quad \text{sowie} \quad G\,(-4.71\,;\,0.82)$$

für den Endpunkt G der Strecke d.

Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} \approx 0.728$$

die gesuchte Länge.



c) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_F = 1$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = 1 \quad \text{sowie} \quad F\,(1\,;\,1)$$

für den Anfangspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{0.5} = -2$$

und weil F auf n liegt auch

$$y = -2\,x + b \quad \Rightarrow \quad 1 = -2 \cdot 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -2\,x + 3$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-2\,x + 3 = \frac{1}{2}\,x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = 0$$

und damit

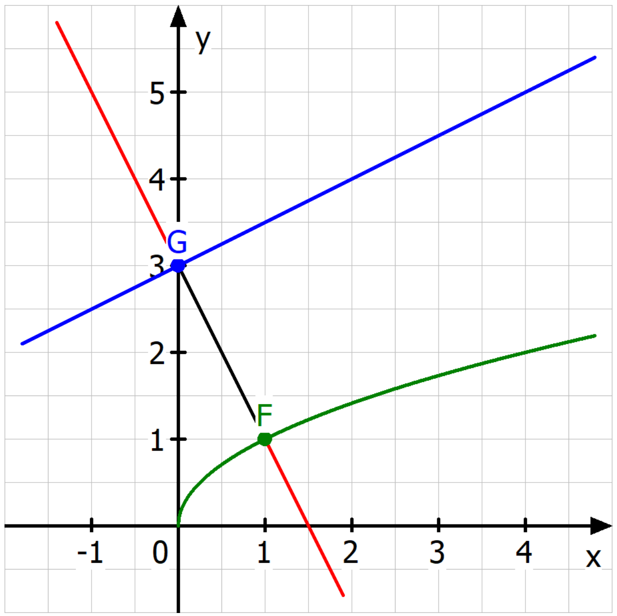
$$y_G = g(x_G) = 3 \quad \text{sowie} \quad G\,(0\,;\,3)$$

für den Endpunkt G der Strecke d.

Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

die gesuchte Länge.



d) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$3 = 3\,x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{F_{1,2}} = \mp 1$$

und damit (weil F_2 nicht relevant ist)

$$y_{F_1} = f(x_{F_1}) = -3 \quad \text{sowie} \quad F_1\,(-1\,;\,-3)$$

für den Anfangspunkt F_1 der Strecke d. Wegen $n \perp g$ gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{3}$$

und weil F_1 auf n liegt auch

$$y = -\frac{1}{3}\,x + b \quad \Rightarrow \quad -3 = -\frac{1}{3}\,(-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{10}{3}$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -\frac{1}{3}\,x - \frac{10}{3}$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-\frac{1}{3}\,x - \frac{10}{3} = 3\,x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = -3.1$$

und damit

$$y_G = g(x_G) = -2.3 \quad \text{sowie} \quad G\,(-3.1\,;\,-2.3)$$

für den Endpunkt G der Strecke d.

Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_{F_1})^2 + (y_G - y_{F_1})^2} \approx 2.21$$

die gesuchte Länge.