Gegeben sind Paare von Funktionen $g$ und $f$ mit

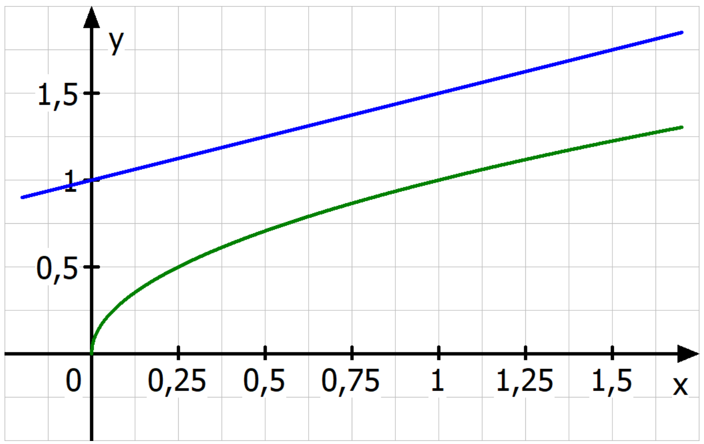
| | | |
|---|---|---|
| a) | $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ | $f(x) = x^2$ |
| b) | $g(x) = -\frac{1}{4}x$ | $f(x) = -\sqrt{x} + 1$ |
| c) | $g(x) = 12x + 1$ | $f(x) = x^3$ |
| d) | $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ | $f(x) = \sqrt{x}$ |
| e) | $g(x) = -x + 2$ | $f(x) = \frac{x+1}{x}$ |
| f) | $g(x) = \frac{1}{6}x + 2$ | $f(x) = \sqrt[3]{x}$ |

Löse die folgenden Aufgaben.

1. Gegeben sind die Funktionen $g$ und $f$ mit

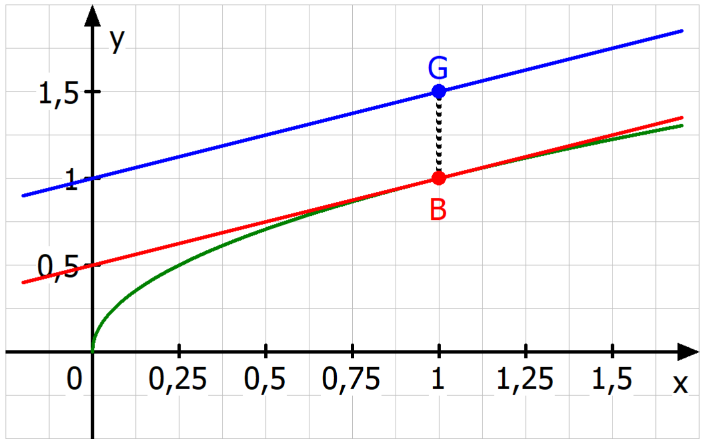
$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

siehe die blaue Gerade bzw. die grüne Kurve in der Zeichnung.




Beantworte für das gegebene $g$ und $f$ folgende Fragen.

- Um wieviel muss man die blaue Gerade vertikal verschieben, damit sie zu einer Tangente an die grüne Kurve, d.h. zur roten Gerade wird?
- Wie lauten die Koordinaten des Punktes $B$, wo sich Tangente und der Graph $G(f)$ berühren?




2. Löse die Aufgaben a) bis f) so wie die Aufgabe 1.

1. Lösungsidee: Wenn man die Gerade $g$ so verschiebt, dass sie $G(f)$ im Punkt $B$ berührt, so müssen in diesem Punkt $B$ die Steigungen der beiden Funktionen übereinstimmen. Es muss dort

$$g'(x) = f'(x)$$

gelten und diese Gleichung liefert die Koordinate $x_B$ von $B$ und $G$, welche übereinander liegen. Eingesetzt in $f$ und $g$ erhält man

$$y_B = f(x_B) \quad \Rightarrow \quad B(x_B\,;\,y_B)$$

bzw.

$$y_G = g(x_B) \quad \Rightarrow \quad G(x_G\,;\,y_G)$$

und die Differenz

$$\Delta y = y_B - y_G$$

stellt dann die gesuchte Verschiebung dar, wobei $g$ für $\Delta y > 0$ nach oben bzw. für $\Delta y < 0$ nach unten verschoben werden muss.

Lösung: Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = 1$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = 1 \quad \Rightarrow \quad B(1\,;\,1)$$

für den Berührungspunkt $B$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = 1.5 \quad \Rightarrow \quad G\,(1\,;\,1.5)$$

und damit

$$\Delta y = y_B - y_G = 1 - 1.5 = -0.5$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 0.5 nach unten verschoben, siehe Zeichnung in der Aufgabenstellung.

2. a) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{3}{2} = 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \frac{3}{4}$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{9}{16}\right)$$

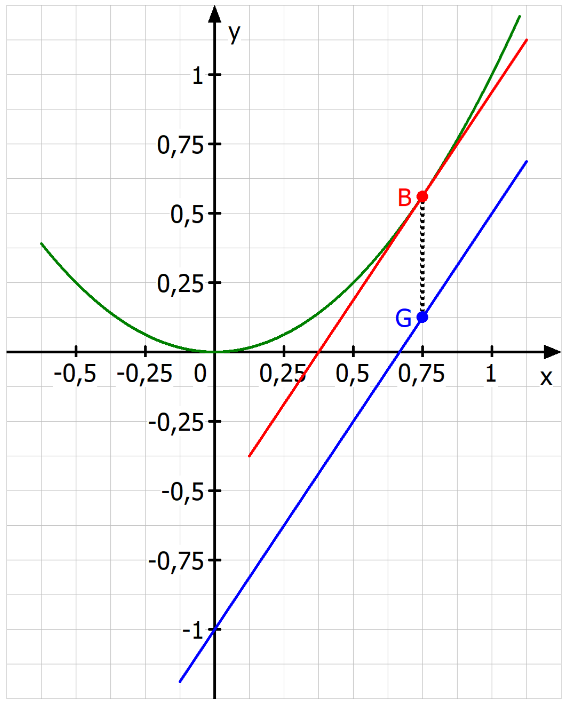
für den Berührungspunkt $B$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{8}\right)$$

und damit

$$\Delta y = y_B - y_G = \frac{9}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16} \approx 0.44$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 0.44 nach oben verschoben.



b) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = 4$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = -1 \quad \Rightarrow \quad B(4\,;\,-1)$$

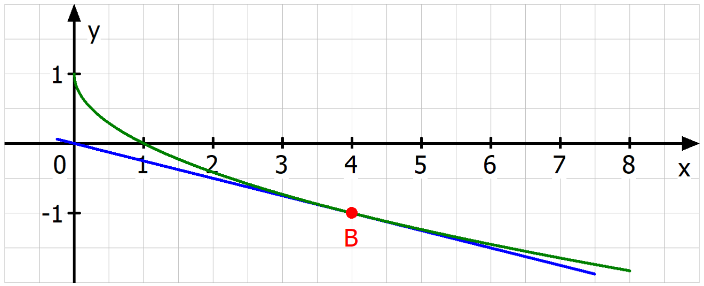
für den Berührungspunkt $B$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = -1 \quad \Rightarrow \quad G\,(4\,;\,-1)$$

und damit

$$\Delta y = y_B - y_G = -1 - (-1) = 0$$

d.h. die Gerade $g$ berührt $G(f)$ bereits.




c) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$12 = 3\,x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \pm 2$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = \pm 8$$

sowie

$$B_1(2\,;\,8) \quad \text{und} \quad B_2(-2\,;\,-8)$$

für die Berührungspunkte $B_1$ und $B_2$ auf $G(f)$.

Ausserdem gilt

$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = 25 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(2\,;\,25)$$

und damit

$$\Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} = 8 - 25 = -17$$

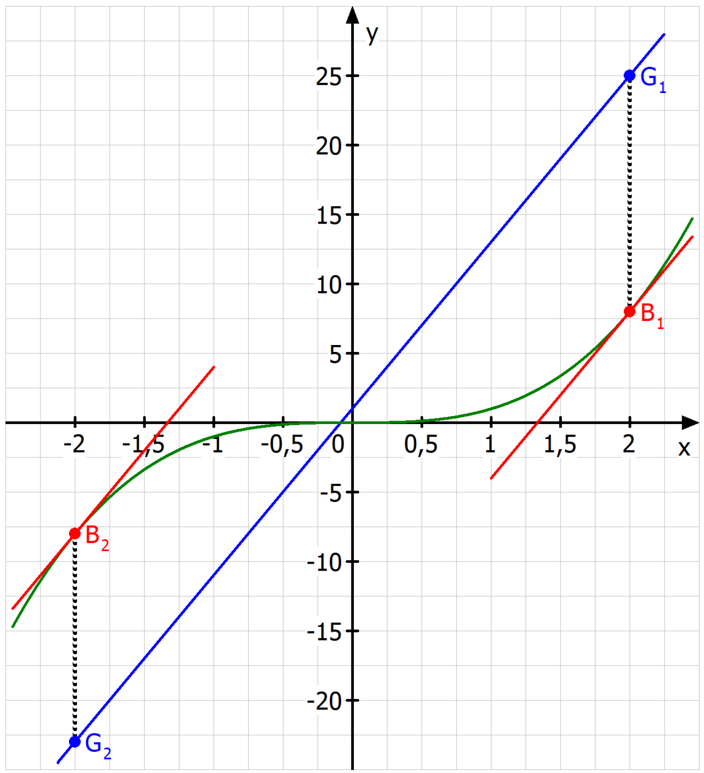
bzw.

$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = -23 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-2\,;\,-23)$$

und damit

$$\Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} = -8 - (-23) = 15$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 17 nach unten bzw. 15 nach oben verschoben.



d) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \frac{9}{4}$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right)$$

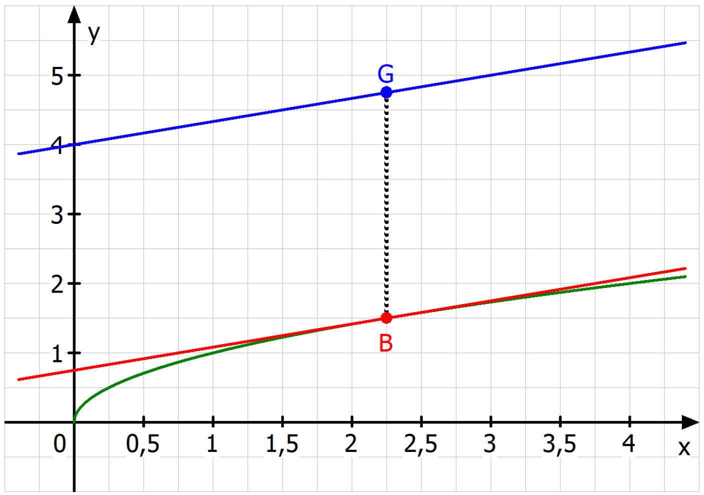
für den Berührungspunkt $B$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = \frac{19}{4} \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{19}{4}\right)$$

und damit

$$\Delta y = y_B - y_G = \frac{3}{2} - \frac{19}{4} = -\frac{13}{4} = -3.25$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 3.25 nach unten verschoben.




e) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-1 = -\frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{B_{1,2}} = \pm 1$$

und damit

$$y_{B_1} = f(x_{B_1}) = 2 \quad \Rightarrow \quad B_1(1\,;\,2)$$

bzw.

$$y_{B_2} = f(x_{B_2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2(-1\,;\,0)$$

für die Berührungspunkte $B_1$ und $B_2$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(1\,;\,1)$$

und damit

$$\Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} = 2 - 1 = 1$$

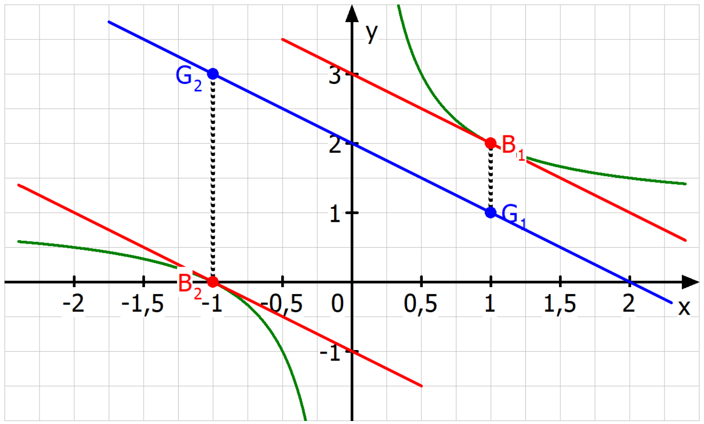
bzw.

$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = 3 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-1\,;\,3)$$

und damit

$$\Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} = 0 - 3 = -3$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 1 nach oben bzw. 3 nach unten verschoben.



f) Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.8$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.4$$

bzw.

$$B_1(2\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}) \quad \text{und} \quad B_2(-2\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2})$$

für die Berührungspunkte $B_1$ und $B_2$ auf $G(f)$. Ausserdem gilt

$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = \frac{\sqrt{2}}{3} + 2 \approx 2.5 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(2.8\,;\,2.5)$$

und damit

$$\Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} \approx \sqrt{2} - 2.5 \approx -1.1$$

bzw.

$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = \frac{-\sqrt{2}}{3} + 2 \approx 1.5 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-2.8\,;\,1.5)$$

und damit

$$\Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} \approx -\sqrt{2} - 1.5 \approx -2.9$$

d.h. die Gerade $g$ wird um 1.1 bzw. 2.9 nach unten verschoben.