Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f, vergleiche FS 8.7, mit

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. y-Achsenabschnitt
3. Nullstellen (Position und Art)
4. Polstellen (Position und Art) und Definitionsbereich D
5. Asymptote
6. Die ersten zwei Ableitungen
7. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
8. Extrema, d.h. Minima und Maxima
9. Wertebereich W
10. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. Ursprung wegen

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x} = -\frac{(-x)^4+1}{(-x)^3-(-x)} = -f(-x)$$

vergleiche FS 9.2.2. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von f immer symmetrisch bez. Ursprung auftreten.

2. Es gibt keinen y-Achsenabschnitt wegen

$$N(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin D$$

3. Es gibt keine Nullstelle wegen

$$Z(x) = x^4 + 1 \geq 1 > 0$$

4. Wegen

$$N(x) = x^3 - x = x\,(x^2-1) = x\,(x+1)\,(x-1) = 0$$

hat f drei Polstellen mit VZW bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \pm 1$$

und es gilt

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\,;\pm 1\}$$

5. Eine Polynomdivision liefert die Asymptote a sowie den Rest R mit $R(x) = x^2+1$ und damit die Differenz d gemäss

$$a(x) = x \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x} \approx \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

Wegen

$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+$$

sowie

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

verläuft $G(f)$ „rechts oberhalb“ bzw. „links unterhalb“ der Asymptote, siehe die blauen Punkte in der Zeichnung.

6. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

   ```
   D[(x^4 + 1) / (x^3 - x), {x, n}]
   ```

   mit $n \in \{1\,;2\,;3\}$, um f', f'' und f''' zu berechnen.

   b) Mit dem CAS-Befehl und $n = 1$ gilt

   $$f'(x) = \frac{(x^2+1)\,(x^4-4\,x^2+1)}{x^2\,(x+1)^2\,(x-1)^2}$$

   c) Mit dem CAS-Befehl und $n = 2$ gilt

   $$f''(x) = 2\,\frac{x^6+9\,x^4-3\,x^2+1}{x^3\,(x+1)^3\,(x-1)^3}$$

   d) Mit dem CAS-Befehl und $n = 3$ gilt

   $$f'''(x) = -6\,\frac{x^8+16\,x^6-4\,x^4+4\,x^2-1}{x^4\,(x+1)^4\,(x-1)^4}$$

7. Das Steigungsverhalten von f wird durch die erste Ableitung

   $$f'(x) = \frac{(x^2+1)\,(x^4-4\,x^2+1)}{x^2\,(x+1)^2\,(x-1)^2}$$

   bestimmt – genauer durch deren VZ.

   Der Term

   $$x^2+1 \geq 1 > 0$$

   kann sein VZ nicht wechseln. Die drei Potenzen im Nenner können ihr VZ auch nicht wechseln, aber sie bewirken, dass bei den drei Polstellen

   $$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \pm 1$$

   keine Steigung definiert ist.

Damit ist es der Ausdruck

$$x^4 - 4\,x^2 + 1$$

welcher über das VZ von f' entscheidet und mit dem CAS-Befehl

```
Solve[x^4 - 4 x^2 + 1 == 0, x]
```

findet man für diesen die vier Nullstellen

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx \pm 1.93$$

$$x_{6,7} = \pm\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx \pm 0.518$$

von f', welche die x-Achse in fünf Intervalle unterteilen.

Die drei mittleren Intervalle werden durch die drei Polstellen nochmals unterteilt, d.h. es gibt sieben Steigungsintervalle

$x \in I$	$f'(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;x_5[$	>0	streng monoton wachsend
$]x_5\,;-1[$	<0	streng monoton fallend
$]-1\,;x_7[$	<0	streng monoton fallend
$]x_7\,;0[$	>0	streng monoton wachsend
$]0\,;x_6[$	>0	streng monoton wachsend
$]x_6\,;1[$	<0	streng monoton fallend
$]1\,;x_4[$	<0	streng monoton fallend
$]x_4\,;\infty[$	>0	streng monoton wachsend

8. Extrema bestimmen

a) Wegen
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4\,x^2 + 1 = 0$$
hat f vier kritische Punkte bei
$$x_{4,5} = \pm\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx \pm 1.93$$
$$x_{6,7} = \pm\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx \pm 0.518$$
d.h. dort könnten Extrema auftreten, vergleiche die vorherige Teilaufgabe mit den Steigungsintervallen.

b) Anschliessend zwei Tipps, wie man z.B. für
$$x_4 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$
die zweite Ableitung
$$f''(x) = 2\,\frac{x^6 + 9\,x^4 - 3\,x^2 + 1}{(x\,(x+1)\,(x-1))^3} = \frac{2\,x^6 + 18\,x^4 - 6\,x^2 + 2}{(x^3 - x)^3}$$
und die Funktion f auswerten kann.

1. Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
(2 x^6 + 18 x^4 - 6 x^2 + 2) / (x^3 - x)^3

    /. x -> Sqrt[2 + Sqrt[3]]
```

um $f''(x_4)$ zu berechnen.

2. Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
(x^4 + 1) / (x^3 - x)

    /. x -> Sqrt[2 + Sqrt[3]]
```

um $f(x_4)$ zu berechnen.

c) Bei x_4 existiert wegen
$$f''\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = -6\,\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-2) > 0$$
und
$$y_4 = f(x_4) = f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 2\,\sqrt{2} \approx 2.83$$
ein Minimum
$$Min_4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}};\, 2\,\sqrt{2}\right)$$

d) Bei x_5 existiert wegen
$$f''\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 6\,\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-2) < 0$$
und
$$y_5 = f(x_5) = f\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = -2\,\sqrt{2} \approx -2.83$$
ein Maximum
$$Max_5\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}};\, -2\,\sqrt{2}\right)$$

Wie zu erwarten war, sind die zwei Extrema bei x_4 und x_5 zueinander punktsymmetrisch bez. Ursprung, vergleiche Teilaufgabe 1.

e) Bei x_6 existiert wegen

$$f''\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = -6\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+2) < 0$$

und

$$y_6 = f(x_6) = f\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{2} \approx -2.83$$

ein Maximum

$$Max_6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}};\,-2\sqrt{2}\right)$$

f) Bei x_7 existiert wegen

$$f''\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+2) > 0$$

und

$$y_7 = f(x_7) = f\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

ein Minimum

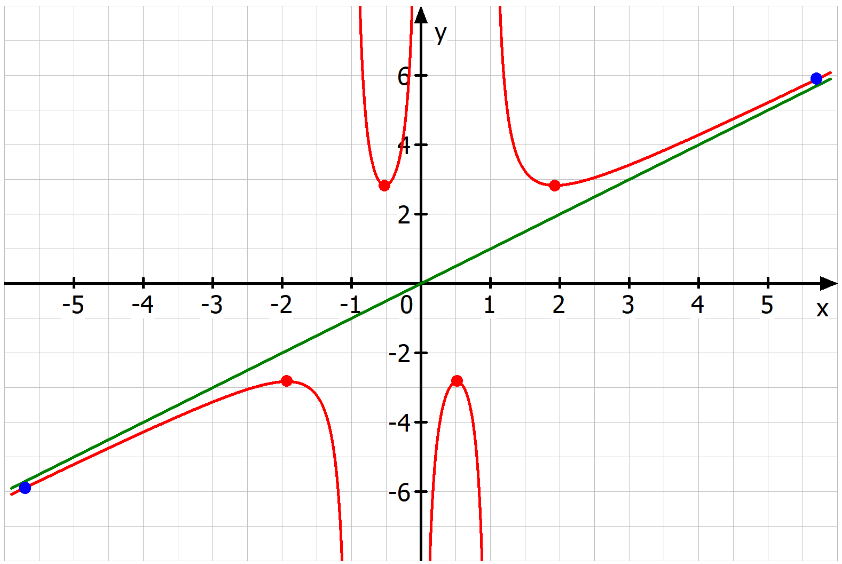
$$Min_7\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}};\,2\sqrt{2}\right)$$

Wie zu erwarten war, sind die zwei Extrema bei x_6 und x_7 zueinander punktsymmetrisch bez. Ursprung, vergleiche Teilaufgabe 1.

9. Mit der Asymptote, den Polstellen, den Steigungsintervallen und den Extrema gilt für den Wertebereich

$$W = \,]-\infty;\,-2\sqrt{2}[\,\cup\,]2\sqrt{2};\,\infty[$$

10. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$



Die grüne Gerade ist die Asymptote a. Vergleiche die Steigung der Kurve mit den Steigungsintervallen.