Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion $f$, vergleiche FS 8.7, mit

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. $y$-Achsenabschnitt
3. Nullstellen (Position und Art)
4. Polstellen (Position und Art) und Definitionsbereich $D$
5. Asymptote
6. Die ersten zwei Ableitungen
7. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
8. Extrema, d.h. Minima und Maxima
9. Wertebereich $W$
10. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. Ursprung wegen
$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+x} = -\frac{(-x)^4+1}{(-x)^3+(-x)} = -f(-x)$$
vergleiche FS 9.2.2. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von $f$ immer symmetrisch bez. Ursprung auftreten.

2. Es gibt keinen $y$-Achsenabschnitt wegen
$$N(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin D$$

3. Es gibt keine Nullstelle wegen
$$Z(x) = x^4 + 1 \geq 1 > 0$$

4. Wegen
$$N(x) = x^3 + x = x\,(x^2+1) = 0$$
hat $f$ eine Polstelle mit VZW bei
$$x_1 = 0$$
und es gilt
$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5. Eine Polynomdivision liefert die Asymptote $a$ sowie den Rest $R$ mit $R(x) = -x^2+1$ und damit die Differenz $d$ gemäss
$$a(x) = x \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{-x^2+1}{x^3+x} \approx \frac{-x^2}{x^3} = \frac{-1}{x}$$
Wegen
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(\infty) \approx \frac{-1}{\infty} = 0^-$$
sowie
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(-\infty) \approx \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$
verläuft $G(f)$ „rechts unterhalb“ bzw. „links oberhalb“ der Asymptote, siehe die blauen Punkte in der Zeichnung.

6. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

   ```
   D[(x^4 + 1) / (x^3 + x), {x, n}]
   ```

   mit $n \in \{1\,;2\,;3\}$, um $f'$, $f''$ und $f'''$ zu berechnen.

   b) Mit dem CAS-Befehl und $n = 1$ gilt

   $$f'(x) = \frac{(x+1)\,(x-1)\,(x^4+4\,x^2+1)}{x^2\,(x^2+1)^2}$$

   Die Terme

   $$x^4 + 4\,x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

   und

   $$x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

   können nicht in Linearfaktoren zerlegt werden.

   c) Mit dem CAS-Befehl und $n = 2$ gilt

   $$f''(x) = -2\,\frac{x^6 - 9\,x^4 - 3\,x^2 - 1}{x^3\,(x^2+1)^3}$$

   d) Mit dem CAS-Befehl und $n = 3$ gilt

   $$f'''(x) = 6\,\frac{x^8 - 16\,x^6 - 4\,x^4 - 4\,x^2 - 1}{x^4\,(x^2+1)^4}$$

7. Das Steigungsverhalten von $f$ wird durch die erste Ableitung

   $$f'(x) = \frac{(x+1)\,(x-1)\,(x^4+4\,x^2+1)}{x^2\,(x^2+1)^2}$$

   bestimmt – genauer durch deren VZ.

Die Terme

$$x^4 + 4\,x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

und

$$(x^2+1)^2 \geq 1 > 0$$

können ihr VZ nicht wechseln. Der Term

$$x^2 \geq 0$$

im Nenner kann sein VZ auch nicht wechseln, aber er bewirkt, dass bei der Polstelle

$$x_1 = 0$$

keine Steigung definiert ist.

Damit ist es der Ausdruck

$$(x+1)\,(x-1)$$

welcher über das VZ von $f'$ entscheidet und durch diesen wird die $x$-Achse in drei Intervalle unterteilt.

Das mittlere Intervall $]-1\,;1[$ wird durch die Polstelle bei $x_1 = 0$ nochmals in die Intervalle

$$]-1\,;0[ \quad \text{und} \quad ]0\,;1[$$

unterteilt, d.h. es gibt vier Steigungsintervalle

| $x \in I$ | $f'(x)$ | $G(f)$ |
|---|---|---|
| $]-\infty\,;-1[$ | $> 0$ | streng monoton wachsend |
| $]-1\,;0[$ | $< 0$ | streng monoton fallend |
| $]0\,;1[$ | $< 0$ | streng monoton fallend |
| $]1\,;\infty[$ | $> 0$ | streng monoton wachsend |

8. Extrema bestimmen

   a) Wegen
   $$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,(x-1) = 0$$
   hat $f$ zwei kritische Punkte bei
   $$x_{2,3} = \pm 1$$
   d.h. dort könnten Extrema auftreten.

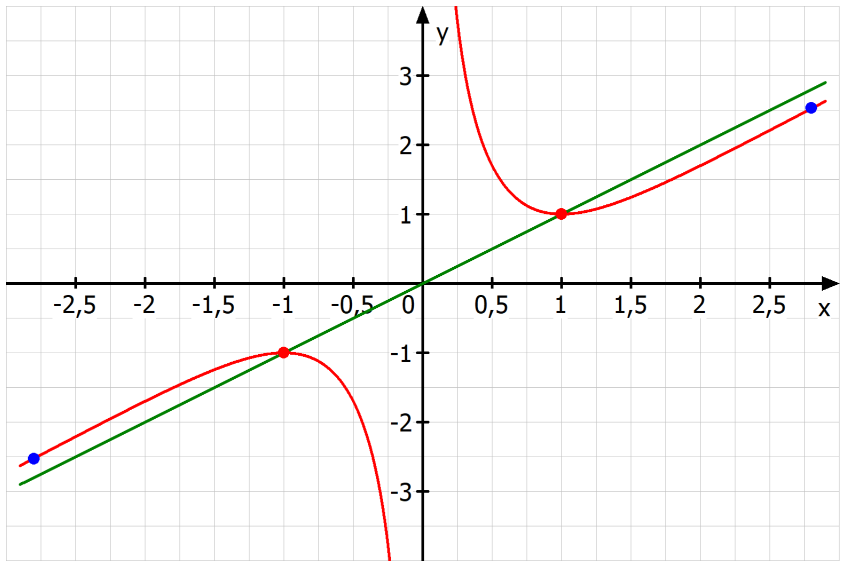
   b) Bei $x_2$ existiert wegen
   $$f''(1) = -2\,\frac{1^6 - 9\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 - 1}{1^3\,(1^2+1)^3} > 0$$
   und $y_2 = f(x_2) = 1$ ein Minimum
   $$Min_2(1\,;\,1)$$

   c) Bei $x_3$ existiert wegen
   $$f''(-1) = -2\,\frac{(-1)^6 - 9\,(-1)^4 - 3\,(-1)^2 - 1}{(-1)^3\,((-1)^2+1)^3} < 0$$
   und $y_3 = f(x_3) = -1$ ein Maximum
   $$Max_3(-1\,;\,-1)$$

   Wie zu erwarten war, sind die zwei Extrema zueinander punktsymmetrisch bez. Ursprung, vergleiche Teilaufgabe 1.

9. Mit der Asymptote, der Polstelle, den Steigungsintervallen und den Extrema gilt für den Wertebereich
   $$W = \,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,\infty[$$

10. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$




Die grüne Gerade ist die Asymptote $a$. Vergleiche die Steigung der Kurve mit den Steigungsintervallen.