Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f, vergleiche FS 8.7, mit

$$f(x) = \frac{6\,x}{x^2+3} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. y-Achsenabschnitt
3. Nullstellen (Position und Art)
4. Polstellen (Position und Art) und Definitionsbereich D
5. Asymptote
6. Die ersten drei Ableitungen
7. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
8. Extrema, d.h. Minima und Maxima
9. Wertebereich W
10. Krümmungsverhalten, Krümmungsintervalle
11. Wendepunkt(e)
12. Wendetangente(n)
13. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. Ursprung wegen

$$f(x) = \frac{6\,x}{x^2+3} = -\frac{6\,(-x)}{(-x)^2+3} = -f(-x)$$

vergleiche FS 9.2.2. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von f immer symmetrisch bez. Ursprung auftreten.

2. Es gilt

$$f(0) = \frac{6 \cdot 0}{0^2+3} = 0$$

3. Wegen

$$Z(x) = 6\,x = 0$$

hat f eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = 0$.

4. Wegen

$$N(x) = x^2 + 3 \geq 3 > 0$$

hat f keine Polstellen und es gilt $D = \mathbb{R}$.

5. Die Funktion f ist echt gebrochen und damit ist die x-Achse die Asymptote, vergleiche FS 8.7.4. Für die Asymptote a und die Differenz d gilt

$$a(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = f(x) = \frac{6\,x}{x^2+3} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Wegen

$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+$$

sowie

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

verläuft $G(f)$ „rechts oberhalb“ bzw. „links unterhalb“ der Asymptote, siehe die blauen Punkte in der Zeichnung.

6. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

   ```
   D[6 x / (x^2 + 3), {x, n}]
   ```

   mit $n \in \{1;2;3\}$, um f', f'' und f''' zu berechnen.

   b) Mit der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6 \cdot (x^2+3) - 6\,x \cdot 2\,x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{18 - 6\,x^2}{(x^2+3)^2} = -6\,\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2} \\ &= -6\,\frac{(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal zwei Extrema geben.

   c) Mit der Quotienten- und Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= -6\,\frac{2\,x \cdot (x^2+3)^2 - (x^2-3) \cdot 2\,(x^2+3)\,2\,x}{(x^2+3)^4} \\ &= -6\,\frac{2\,x\,(x^2+3)\,\left((x^2+3) - 2\,(x^2-3)\right)}{(x^2+3)^4} \\ &= -12\,x\,\frac{9-x^2}{(x^2+3)^3} = 12\,x\,\frac{x^2-9}{(x^2+3)^3} \\ &= 12\,\frac{x\,(x+3)\,(x-3)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal drei Wendepunkte geben.

   d) Ohne Herleitung gilt

$$f'''(x) = -36\,\frac{x^4 - 18\,x^2 + 9}{(x^2+3)^4}$$

7. Das Steigungsverhalten von f wird durch die erste Ableitung

$$f'(x) = -6\,\frac{(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$$

   bestimmt – genauer durch deren Zähler

$$-(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3})$$

   weil der Nenner wegen

$$(x^2+3)^2 \geq 9 > 0$$

   positiv ist. Damit gibt es drei Steigungsintervalle

$x \in I$	$f'(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,-\sqrt{3}[$	< 0	streng monoton fallend
$]-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}[$	> 0	streng monoton wachsend
$]\sqrt{3}\,;\,\infty[$	< 0	streng monoton fallend

8. Extrema bestimmen

   a) Wegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3}) = 0$$

   hat f zwei kritische Punkte bei

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

   d.h. dort könnten Extrema auftreten.

   b) Bei x_2 existiert wegen

$$f''(\sqrt{3}) = 12\,\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3})^2 - 9}{((\sqrt{3})^2+3)^3} < 0$$

   und $y_2 = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ein Maximum

$$Max(\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3})$$

c) Bei x_3 existiert wegen

$$f''(-\sqrt{3}) = 12\,(-\sqrt{3})\,\frac{(-\sqrt{3})^2-9}{((-\sqrt{3})^2+3)^3} > 0$$

und $y_3 = f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ ein Minimum

$$Min(-\sqrt{3}\,;\,-\sqrt{3})$$

9. Mit der Asymptote, den Steigungsintervallen und den Extrema gilt für den Wertebereich

$$W = [-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}]$$

10. Das Krümmungsverhalten von f wird durch die zweite Ableitung

$$f''(x) = 12\,\frac{x\,(x+3)\,(x-3)}{(x^2+3)^3}$$

bestimmt – genauer durch deren Zähler

$$x\,(x+3)\,(x-3)$$

weil der Nenner wegen

$$(x^2+3)^3 \geq 27 > 0$$

positiv ist. Damit gibt es vier Krümmungsintervalle

$x \in I$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,-3[$	<0	rechtsgekrümmt
$]-3\,;\,0[$	>0	linksgekrümmt
$]0\,;\,3[$	<0	rechtsgekrümmt
$]3\,;\,\infty[$	>0	linksgekrümmt

11. Wendepunkte bestimmen

a) Wegen

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+3)\,(x-3) = 0$$

hat f' drei kritische Punkte bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{4,5} = \pm 3$$

d.h. dort könnten Wendepunkte auftreten.

b) Bei x_1 existiert wegen

$$f'''(0) = -36\,\frac{0^4 - 18\cdot 0^2 + 9}{(0^2+3)^4} \neq 0$$

und $y_1 = f(0) = 0$ ein Wendepunkt

$$W_1(0\,;\,0)$$

c) Bei $x_{4,5}$ existieren wegen

$$f'''(\pm 3) = -36\,\frac{(\pm 3)^4 - 18\,(\pm 3)^2 + 9}{((\pm 3)^2+3)^4} \neq 0$$

und $y_{4,5} = f(\pm 3) = \pm 1.5$ zwei Wendepunkte

$$W_{4,5}(\pm 3\,;\,\pm 1.5)$$

12. Wendetangenten bestimmen

a) Für die Steigung der Wendetangente in W_1 gilt

$$m_1 = f'(0) = -6\,\frac{0^2-3}{(0^2+3)^2} = 2$$

und damit ist diese gegeben durch

$$t_1(x) = m_1\,x = 2\,x$$

b) Für die Steigung der Wendetangenten in $W_{4,5}$ gilt

$$m_{4,5} = f'(\pm 3) = -6\,\frac{(\pm 3)^2 - 3}{((\pm 3)^2 + 3)^2} = -0.25$$

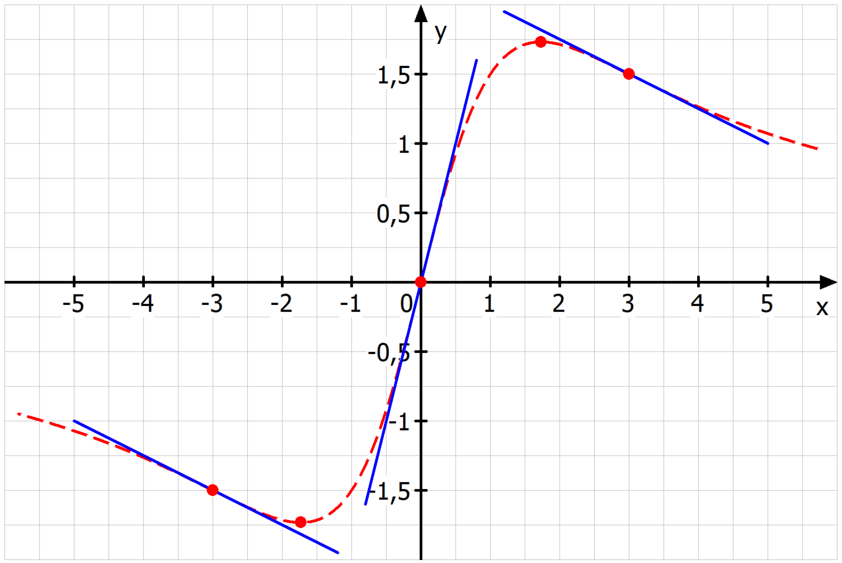
und damit sind diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_4(x) &= m_{4,5}\,(x - x_4) + y_4 \\ &= -0.25\,(x - 3) + 1.5 \end{aligned}$$

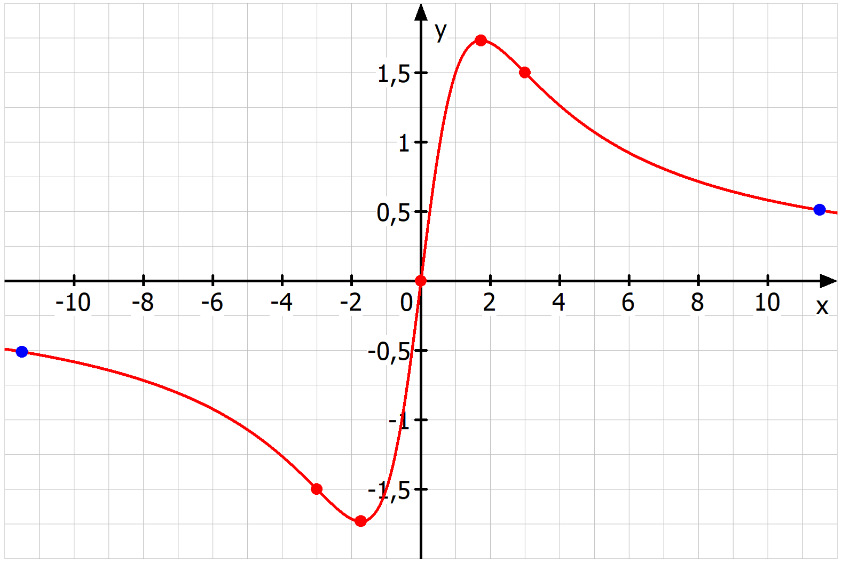
bzw.

$$\begin{aligned} t_5(x) &= m_{4,5}\,(x - x_5) + y_5 \\ &= -0.25\,(x + 3) - 1.5 \end{aligned}$$

c) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



13. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$



Die x-Achse ist die Asymptote a. Vergleiche die Steigung und die Krümmung der Kurve mit den Steigungs- bzw. Krümmungsintervallen.