Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f, vergleiche FS 8.7, mit

$$f(x) = \frac{6\,x^2}{x^2+3} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. y-Achsenabschnitt
3. Nullstellen (Position und Art)
4. Polstellen (Position und Art) und Definitionsbereich D
5. Asymptote
6. Die ersten drei Ableitungen
7. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
8. Extrema, d.h. Minima und Maxima
9. Wertebereich W
10. Krümmungsverhalten, Krümmungsintervalle
11. Wendepunkt(e)
12. Wendetangente(n)
13. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. y-Achse, da in der ZV nur gerade Exponenten vorkommen, vergleiche FS 9.2.1. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von f immer symmetrisch bez. y-Achse auftreten.

2. Es gilt
$$f(0) = \frac{6\cdot 0^2}{0^2+3} = 0$$

3. Wegen
$$Z(x) = 6\,x^2 = 0$$
hat f eine Nullstelle ohne VZW bei $x_1 = 0$.

   Weil es dort nicht zu einem VZW kommt, wird die x-Achse durch $G(f)$ nur berührt und später wird sich zeigen, dass im Ursprung ein Extremum liegt.

4. Wegen
$$N(x) = x^2+3 \geq 3 > 0$$
hat f keine Polstellen und es gilt $D = \mathbb{R}$.

5. Eine Polynomdivision liefert die Asymptote a sowie den Rest $R = -18$ und damit die Differenz d gemäss
$$a(x) = 6 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{-18}{x^2+3} \approx \frac{-1}{x^2}$$
Wegen
$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad d(\pm\infty) \approx \frac{-1}{(\pm\infty)^2} = 0^-$$
verläuft $G(f)$ „rechts unterhalb“ und „links unterhalb“ der Asymptote, siehe die blauen Punkte in der Zeichnung.

6. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

   ```
   D[6 x^2 / (x^2 + 3), {x, n}]
   ```

   mit $n \in \{1\,;2\,;3\}$, um f', f'' und f''' zu berechnen.

   b) Mit der Quotientenregel gilt

   $$f'(x) = \frac{12\,x \cdot (x^2+3) - 6\,x^2 \cdot 2\,x}{(x^2+3)^2} = \frac{36\,x}{(x^2+3)^2}$$

   d.h. es kann maximal ein Extremum geben.

   c) Mit der Quotienten- und Kettenregel gilt

   $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{36 \cdot (x^2+3)^2 - 36\,x \cdot 2\,(x^2+3)\,2\,x}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{36\,(x^2+3)\,\left((x^2+3) - 4\,x^2\right)}{(x^2+3)^4} \\ &= 36\,\frac{3-3\,x^2}{(x^2+3)^3} = -108\,\frac{x^2-1}{(x^2+3)^3} \\ &= -108\,\frac{(x+1)\,(x-1)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal zwei Wendepunkte geben.

   d) Mit der Quotientenregel und der Kettenregel gilt

   $$\begin{aligned} f'''(x) &= -108\,\frac{2\,x \cdot (x^2+3)^3 - (x^2-1) \cdot 3\,(x^2+3)^2\,2\,x}{(x^2+3)^6} \\ &= -108\,\frac{2\,x\,(x^2+3)^2\,\left((x^2+3) - 3\,(x^2-1)\right)}{(x^2+3)^6} \\ &= -216\,x\,\frac{6-2\,x^2}{(x^2+3)^4} = 432\,x\,\frac{x^2-3}{(x^2+3)^4} \\ &= 432\,x\,\frac{(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^4} \end{aligned}$$

7. Das Steigungsverhalten von f wird durch die erste Ableitung

   $$f'(x) = \frac{36\,x}{(x^2+3)^2}$$

   bestimmt – genauer durch deren Zähler, weil der Nenner wegen

   $$(x^2+3)^2 \geq 9 > 0$$

   positiv ist. Damit gibt es zwei Steigungsintervalle

$x \in I$	$f'(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;0[$	< 0	streng monoton fallend
$]0\,;\infty[$	> 0	streng monoton wachsend

8. Extrema bestimmen

   a) Wegen

   $$f'(x) = \frac{36\,x}{(x^2+3)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36\,x = 0$$

   hat f einen kritischen Punkt bei

   $$x_1 = 0$$

   d.h. dort könnte ein Extremum auftreten.

   b) Bei x_1 existiert wegen

   $$f''(0) = -108\,\frac{0^2-1}{(0^2+3)^3} > 0$$

   ein Minimum

   $$Min(0\,;0)$$

   was wegen der zweifachen Nullstelle zu erwarten war.

9. Mit der Asymptote, den Steigungsintervallen und dem Minimum im Ursprung gilt für den Wertebereich

   $$W = [0\,;6[$$

10. Das Krümmungsverhalten von f wird durch die zweite Ableitung

$$f''(x) = 108\,\frac{-(x+1)\,(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

bestimmt – genauer durch deren Zähler

$$-(x+1)\,(x-1)$$

weil der Nenner wegen

$$(x^2+3)^3 \geq 27 > 0$$

positiv ist. Damit gibt es drei Krümmungsintervalle

$x \in I$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,-1[$	< 0	rechtsgekrümmt
$]-1\,;\,1[$	> 0	linksgekrümmt
$]1\,;\,\infty[$	< 0	rechtsgekrümmt

11. Wendepunkte bestimmen

a) Wegen

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,(x-1) = 0$$

hat f' zwei kritische Punkte bei

$$x_{2,3} = \pm 1$$

d.h. dort könnten Wendepunkte auftreten.

b) Bei $x_{2,3}$ existieren wegen

$$f'''(\pm 1) = 432\,(\pm 1)\,\frac{(\pm 1)^2 - 3}{((\pm 1)^2+3)^4} \neq 0$$

und $y_{2,3} = f(\pm 1) = 1.5$ zwei Wendepunkte

$$W_{2,3}(\pm 1\,;\,1.5)$$

12. Wendetangenten bestimmen

a) Für die Steigung der Wendetangente in W_2 gilt

$$m_2 = f'(1) = \frac{36 \cdot 1}{(1^2+3)^2} = 2.25$$

und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_2(x) &= m_2\,(x - x_2) + y_2 \\ &= 2.25\,(x-1) + 1.5 \end{aligned}$$

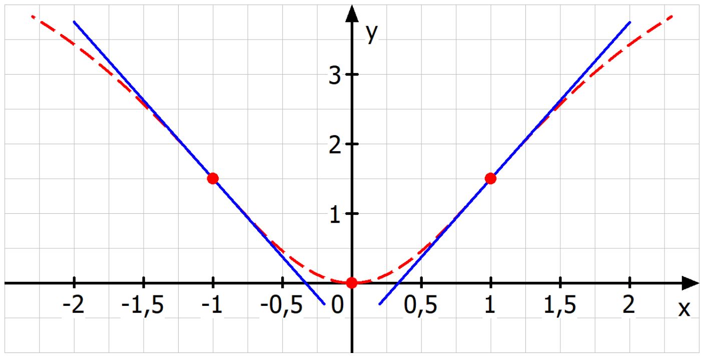
b) Für die Steigung der Wendetangente in W_3 gilt

$$m_3 = f'(-1) = \frac{36 \cdot (-1)}{((-1)^2+3)^2} = -2.25$$

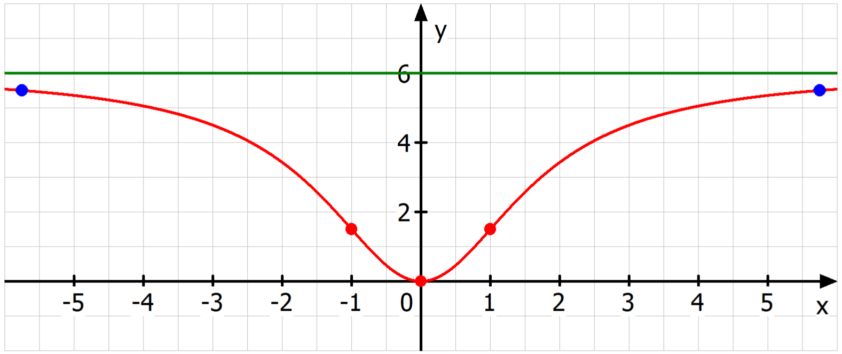
und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_3(x) &= m_3\,(x - x_3) + y_3 \\ &= -2.25\,(x+1) + 1.5 \end{aligned}$$

c) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



13. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$



Die grüne Kurve ist die Asymptote a. Vergleiche die Steigung und die Krümmung der Kurve mit den Steigungs- bzw. Krümmungsintervallen.