Gegeben ist eine Polynomfunktion f, vergleiche FS 8.6, mit

$$f(x) = 3\,x^5 - 20\,x^3$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. Definitionsbereich D
3. y-Achsenabschnitt
4. Nullstellen (Position und Art)
5. Nullstellen (nähere Umgebung)
6. Asymptote
7. Die ersten drei Ableitungen
8. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
9. Extrema, d.h. Minima und Maxima
10. Wertebereich W
11. Krümmungsverhalten, Krümmungsintervalle
12. Wendepunkt(e)
13. Wendetangente(n)
14. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. Ursprung, da in der ZV nur ungerade Exponenten vorkommen, vergleiche FS 9.2.2. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von f immer symmetrisch bez. Ursprung auftreten.
2. Es gilt
$$D = \mathbb{R}$$
für jede Polynomfunktion.
3. Es gilt
$$f(0) = 3 \cdot 0^5 - 20 \cdot 0^3 = 0$$
4. Nullstellen berechnen
   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl
   ```
   Solve[3 x^5 - 20 x^3 == 0, x]
   ```
   um die Gleichung $f(x) = 0$ nach x aufzulösen.
   b) Wegen
   $$\begin{aligned} f(x) &= 3\,x^5 - 20\,x^3 \\ &= 3\,x^3 \left(x^2 - \frac{20}{3}\right) \\ &= 3\,x^3 \left(x + \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{20}{3}}\right) = 0 \end{aligned}$$
   hat f die Nullstellen
   $$x_1 = 0 \quad \text{mit VZW}$$
   und
   $$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} \approx \pm 2.58 \quad \text{mit VZW}$$

5. Verhalten von f in der näheren Umgebung der Nullstellen

   a) Kubisch bei x_1 wegen

$$f_1(x) = 3\,x^3 \left(0 + \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \left(0 - \sqrt{\frac{20}{3}}\right) = -20\,x^3$$

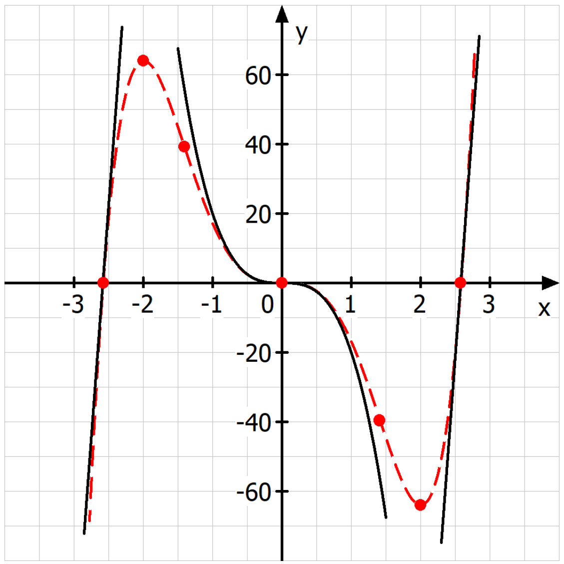
   b) Linear bei x_2 wegen

$$f_2(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 2\sqrt{\frac{20}{3}} \left(x - \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \approx 267\,(x - 2.58)$$

   c) Linear bei x_3 wegen

$$f_3(x) = 3 \left(-\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 \left(x + \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \left(-2\sqrt{\frac{20}{3}}\right) \approx 267\,(x + 2.58)$$

   d) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



6. Für die Asymptote a gilt

$$a(x) = 3\,x^5$$

   vergleiche FS 8.6.

7. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
D[3 x^5 - 20 x^3, {x, n}]
```

   mit $n \in \{1\,;\,2\,;\,3\}$, um f', f'' und f''' zu berechnen.

   b) Mit der Summen- und Potenzregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15\,x^4 - 60\,x^2 \\ &= 15\,x^2\,(x^2 - 4) \\ &= 15\,x^2\,(x + 2)\,(x - 2) \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal drei Extrema geben.

   c) Mit der Summen- und Potenzregel gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 60\,x^3 - 120\,x \\ &= 60\,x\,(x^2 - 2) \\ &= 60\,x\,(x + \sqrt{2})\,(x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal drei Wendepunkte geben.

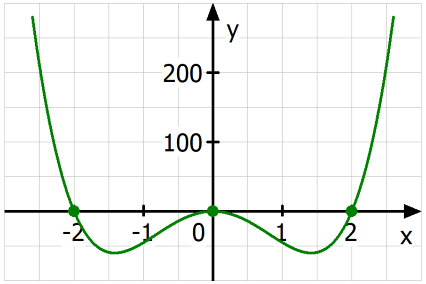
   d) Ausserdem gilt

$$f'''(x) = 180\,x^2 - 120$$

8. Das Steigungsverhalten von f wird durch die erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15\,x^4 - 60\,x^2 \\ &= 15\,x^2\,(x+2)\,(x-2) \end{aligned}$$

bestimmt, vergleiche $G(f')$



sowie die Tabelle mit den Steigungsintervallen

$x \in I$	$f'(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,-2[$	>0	streng monoton wachsend
$]-2\,;\,0[$	<0	streng monoton fallend
$]0\,;\,2[$	<0	streng monoton fallend
$]2\,;\,\infty[$	>0	streng monoton wachsend

9. Extrema bestimmen

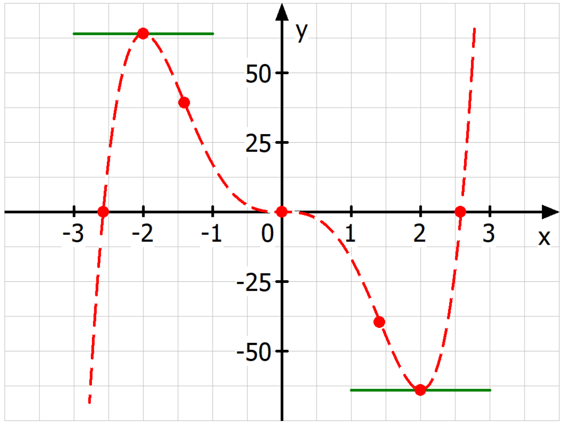
a) Wegen
$$f'(x) = 15\,x^2\,(x+2)\,(x-2) = 0$$
hat f drei kritische Punkte bei
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{4,5} = \pm 2$$
d.h. dort könnten Extrema auftreten.

b) Bei x_1 existiert wegen
$$f''(0) = 60 \cdot 0^3 - 120 \cdot 0 = 0$$
kein Extremum.

c) Bei x_4 existiert wegen
$$f''(2) = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 > 0$$
und $y_4 = f(2) = -64$ ein Minimum
$$Min_4(2\,;\,-64)$$

d) Bei x_5 existiert wegen
$$f''(-2) = 60 \cdot (-2)^3 - 120 \cdot (-2) < 0$$
und $y_5 = f(-2) = 64$ ein Maximum
$$Max_5(-2\,;\,64)$$

e) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.

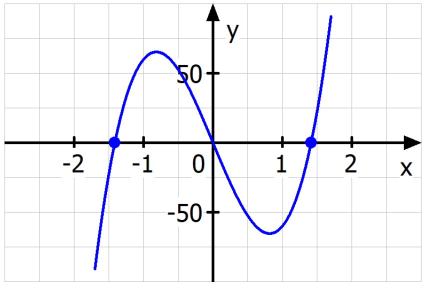


10. Mit der Asymptote a gilt für den Wertebereich
$$W = \mathbb{R}$$

11. Das Krümmungsverhalten von f wird durch die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= 60\,x^3 - 120\,x \\ &= 60\,x\,(x+\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

bestimmt, vergleiche $G(f'')$



sowie die Tabelle mit den Krümmungsintervallen

$x \in I$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,-\sqrt{2}[$	<0	rechtsgekrümmt
$]-\sqrt{2}\,;\,0[$	>0	linksgekrümmt
$]0\,;\,\sqrt{2}[$	<0	rechtsgekrümmt
$]\sqrt{2}\,;\,\infty[$	>0	linksgekrümmt

12. Wendepunkte bestimmen

a) Wegen

$$f''(x) = 60\,x\,(x+\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2}) = 0$$

hat f' drei kritische Punkte bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{6,7} = \pm\sqrt{2}$$

d.h. dort könnten Wendepunkte auftreten.

b) Bei x_1 existiert wegen

$$f'''(0) = 180 \cdot 0^2 - 120 \neq 0$$

und $y_1 = f(0) = 0$ ein Wendepunkt

$$W_1(0\,;\,0)$$

c) Bei x_6 existiert wegen

$$f'''(\sqrt{2}) = 180 \cdot (\sqrt{2})^2 - 120 \neq 0$$

und $y_6 = f(\sqrt{2}) \approx -39.6$ ein Wendepunkt

$$W_6(\sqrt{2}\,;\,-39.6)$$

Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
3 x^5 - 20 x^3 /. x -> Sqrt[2]
```

um $f(\sqrt{2})$ zu berechnen.

d) Bei x_7 existiert wegen

$$f'''(-\sqrt{2}) = 180 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 120 \neq 0$$

und $y_7 = f(-\sqrt{2}) \approx 39.6$ ein Wendepunkt

$$W_7(-\sqrt{2}\,;\,39.6)$$

13. Wendetangenten bestimmen

a) Im Wendepunkt W_1 ist die x-Achse die Wendetangente, d.h. es handelt sich um einen Terrassenpunkt, auch Sattelpunkt genannt.

b) Für die Steigung der Wendetangente in W_6 gilt

$$m_6 = f'(\sqrt{2}) = 15\,(\sqrt{2})^4 - 60\,(\sqrt{2})^2 = -60$$

und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_6(x) &= m_6\,(x - x_6) + y_6 \\ &\approx -60\,(x - \sqrt{2}) - 39.6 \end{aligned}$$

siehe nächste Zeichnung.

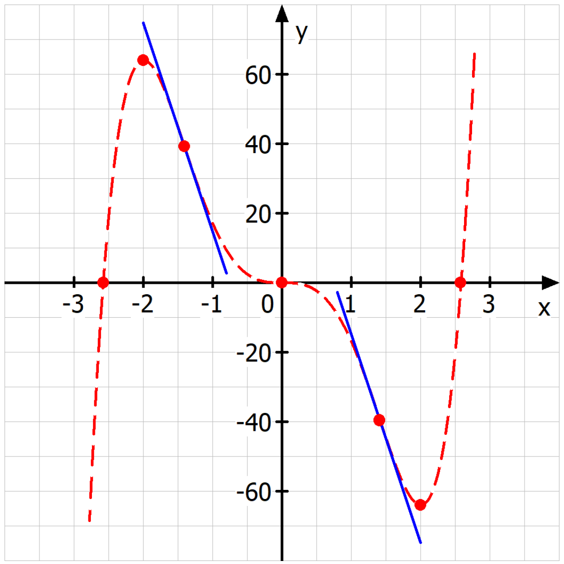
c) Für die Steigung der Wendetangente in W_7 gilt

$$m_7 = f'(-\sqrt{2}) = 15\,(-\sqrt{2})^4 - 60\,(-\sqrt{2})^2 = -60$$

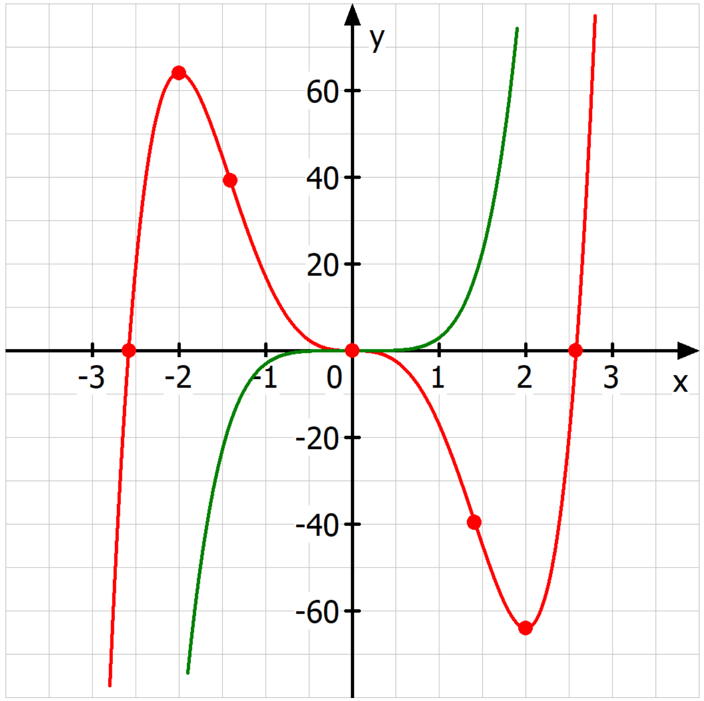
und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_7(x) &= m_7\,(x - x_7) + y_7 \\ &\approx -60\,(x + \sqrt{2}) + 39.6 \end{aligned}$$

d) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



14. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$



Die grüne Kurve ist die Asymptote a. Vergleiche die Steigung und die Krümmung der Kurve mit den Steigungs- bzw. Krümmungsintervallen.