Gegeben ist eine Polynomfunktion f, vergleiche FS 8.6, mit

$$f(x) = x^4 - 18\,x^2$$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

1. Symmetrie
2. Definitionsbereich D
3. y-Achsenabschnitt
4. Nullstellen (Position und Art)
5. Nullstellen (nähere Umgebung)
6. Asymptote
7. Die ersten drei Ableitungen
8. Steigungsverhalten (Monotonie), Steigungsintervalle
9. Extrema, d.h. Minima und Maxima
10. Wertebereich W
11. Krümmungsverhalten, Krümmungsintervalle
12. Wendepunkt(e)
13. Wendetangente(n)
14. Graph $G(f)$

---

1. $G(f)$ ist symmetrisch bez. y-Achse, da in der ZV nur gerade Exponenten vorkommen, vergleiche FS 9.2.1. Damit müssen für alle folgenden Berechnungen sämtliche Eigenschaften von f immer symmetrisch bez. y-Achse auftreten.

2. Es gilt
$$D = \mathbb{R}$$
für jede Polynomfunktion.

3. Es gilt
$$f(0) = 0^4 - 18 \cdot 0^2 = 0$$

4. Nullstellen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

   ```
   Solve[x^4 - 18 x^2 == 0, x]
   ```

   um die Gleichung $f(x) = 0$ nach x aufzulösen.

   b) Wegen
   $$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 18\,x^2 \\ &= x^2\,(x^2 - 18) \\ &= x^2\,(x + \sqrt{18})\,(x - \sqrt{18}) = 0 \end{aligned}$$
   hat f die Nullstellen
   $$x_1 = 0 \quad \text{ohne VZW}$$
   und
   $$x_{2,3} = \pm\sqrt{18} =\approx \pm 4.24 \quad \text{mit VZW}$$

5. Verhalten von f in der näheren Umgebung der Nullstellen

   a) Quadratisch bei x_1 wegen

$$f_1(x) = x^2\,(0+\sqrt{18})\,(0-\sqrt{18}) = -18\,x^2$$

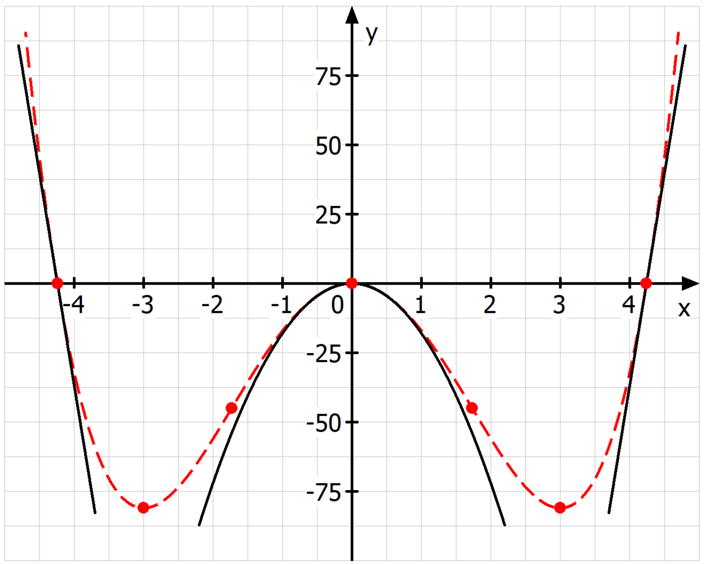
   b) Linear bei x_2 wegen

$$f_2(x) = (\sqrt{18})^2\,2\,\sqrt{18}\,(x-\sqrt{18}) \approx 153\,(x-4.24)$$

   c) Linear bei x_3 wegen

$$f_3(x) = (-\sqrt{18})^2\,(x+\sqrt{18})\,(-2\,\sqrt{18}) \approx -153\,(x+4.24)$$

   d) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



6. Für die Asymptote a gilt

$$a(x) = x^4$$

   vergleiche FS 8.6.

7. Ableitungen berechnen

   a) Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
D[x^4 - 18 x^2, {x, n}]
```

   mit $n \in \{1\,;2\,;3\}$, um f', f'' und f''' zu berechnen.

   b) Mit der Summen- und Potenzregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,x^3 - 36\,x \\ &= 4\,x\,(x^2-9) \\ &= 4\,x\,(x+3)\,(x-3) \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal drei Extrema geben.

   c) Mit der Summen- und Potenzregel gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\,x^2 - 36 \\ &= 12\,(x^2-3) \\ &= 12\,(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

   d.h. es kann maximal zwei Wendepunkte geben.

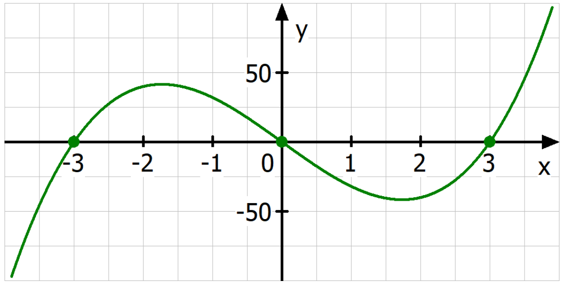
   d) Ausserdem gilt

$$f'''(x) = 24\,x$$

8. Das Steigungsverhalten von f wird durch die erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,x^3 - 36\,x \\ &= 4\,x\,(x+3)\,(x-3) \end{aligned}$$

bestimmt, vergleiche $G(f')$



sowie die Tabelle mit den Steigungsintervallen

$x \in I$	$f'(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;-3[$	< 0	streng monoton fallend
$]-3\,;0[$	> 0	streng monoton wachsend
$]0\,;3[$	< 0	streng monoton fallend
$]3\,;\infty[$	> 0	streng monoton wachsend

9. Extrema bestimmen

a) Wegen

$$f'(x) = 4\,x\,(x+3)\,(x-3) = 0$$

hat f drei kritische Punkte bei

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{4,5} = \pm 3$$

d.h. dort könnten Extrema auftreten.

b) Bei x_1 existiert wegen

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 36 < 0$$

und $y_1 = f(0) = 0$ ein Maximum

$$Max_1(0\,;\,0)$$

c) Bei x_4 existiert wegen

$$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 36 > 0$$

und $y_4 = f(3) = -81$ ein Minimum

$$Min_4(3\,;\,-81)$$

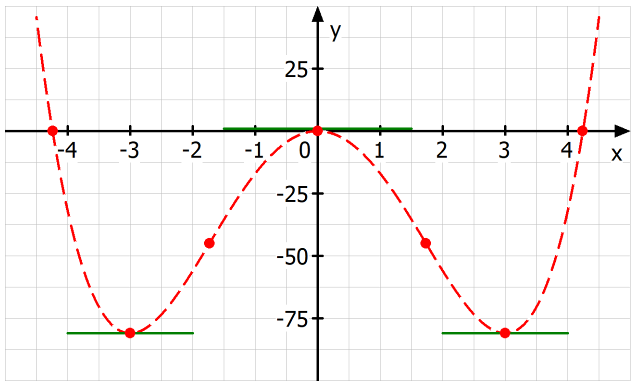
d) Bei x_5 existiert wegen

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3)^2 - 36 > 0$$

und $y_5 = f(-3) = -81$ ein Minimum

$$Min_5(-3\,;\,-81)$$

e) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



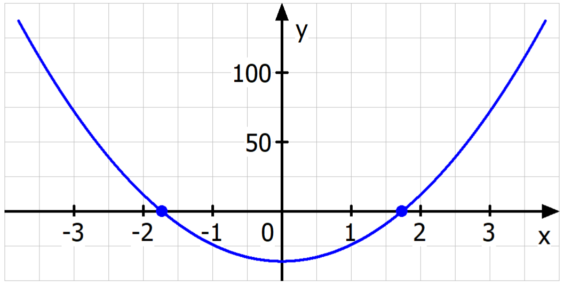
10. Mit den Steigungsintervallen und den Extrema gilt für den Wertebereich

$$W = [-81\,;\,\infty[$$

11. Das Krümmungsverhalten von f wird durch die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\,x^2 - 36 \\ &= 12\,(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

bestimmt, vergleiche $G(f'')$



sowie die Tabelle mit den Krümmungsintervallen

$x \in I$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty; -\sqrt{3}[$	> 0	linksgekrümmt
$]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$	< 0	rechtsgekrümmt
$]\sqrt{3}; \infty[$	> 0	linksgekrümmt

12. Wendepunkte bestimmen

a) Wegen

$$f''(x) = 12\,(x+\sqrt{3})\,(x-\sqrt{3}) = 0$$

hat f' zwei kritische Punkte bei

$$x_{6,7} = \pm\sqrt{3}$$

d.h. dort könnten Wendepunkte auftreten.

b) Bei x_6 existiert wegen

$$f'''(\sqrt{3}) = 24 \cdot \sqrt{3} \neq 0$$

und $y_6 = f(\sqrt{3}) = -45$ ein Wendepunkt

$$W_6(\sqrt{3}\,;\, -45)$$

Tipp: man verwende den CAS-Befehl

```
x^4 - 18 x^2 /. x -> Sqrt[3]
```

um $f(\sqrt{3})$ zu berechnen.

c) Bei x_7 existiert wegen

$$f'''(-\sqrt{3}) = 24 \cdot (-\sqrt{3}) \neq 0$$

und $y_7 = f(-\sqrt{3}) = -45$ ein Wendepunkt

$$W_7(-\sqrt{3}\,;\, -45)$$

13. Wendetangenten bestimmen

a) Für die Steigung der Wendetangente in W_6 gilt

$$m_6 = f'(\sqrt{3}) = 4 \cdot (\sqrt{3})^3 - 36 \cdot \sqrt{3} = -24\,\sqrt{3}$$

und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_6(x) &= m_6\,(x - x_6) + y_6 \\ &= -24\,\sqrt{3}\,(x-\sqrt{3}) - 45 \end{aligned}$$

siehe nächste Zeichnung.

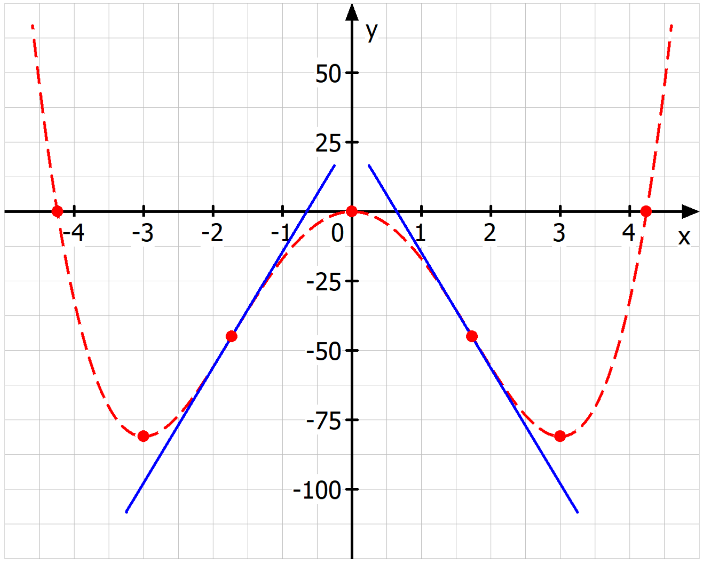
b) Für die Steigung der Wendetangente in W_7 gilt

$$m_7 = f'(-\sqrt{3}) = 4 \cdot (-\sqrt{3})^3 - 36 \cdot (-\sqrt{3}) = 24\,\sqrt{3}$$

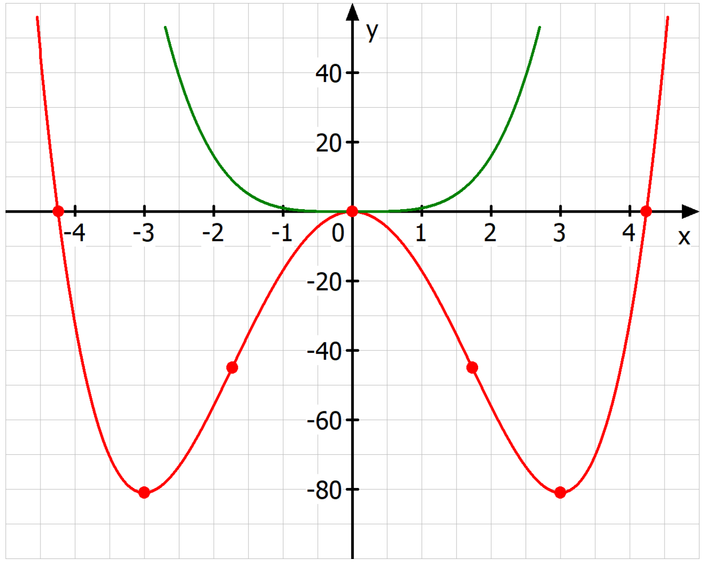
und damit ist diese gegeben durch

$$\begin{aligned} t_7(x) &= m_7\,(x - x_7) + y_7 \\ &= 24\,\sqrt{3}\,(x+\sqrt{3}) - 45 \end{aligned}$$

c) Die rote Kurve steht für den im Moment noch nicht bekannten Graph $G(f)$ mit Nullstellen, Extrema und Wendepunkten.



14. Alle Eigenschaften eintragen ergibt den gesuchten Graph $G(f)$



Die grüne Kurve ist die Asymptote a. Vergleiche die Steigung und die Krümmung der Kurve mit den Steigungs- bzw. Krümmungsintervallen.