Gegeben sind Funktionen f aus früheren Arbeitsblättern.

1. Arbeitsblatt S4B023D2

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 - x + 3$$

2. Arbeitsblatt S4B035D1

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

3. Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 1

$$f(x) = -\frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$$

4. Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

5. Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{x - 3}$$

In jenen Arbeitsblättern wurden die Extrema, d.h. Minima oder Maxima, schon berechnet. Allerdings haben wir dort die zweite Ableitung f'', d.h. die Krümmung, nicht in unsere Überlegungen mit einbezogen.

Gesucht ist daher ergänzend je die zweite Ableitung, damit man dort die kritischen Punkte x_p einsetzen kann. Für $f''(x_p) < 0$ liegt bei x_p ein Maximum vor und für $f''(x_p) > 0$ ein Minimum.

1. Lösung zu Arbeitsblatt S4B023D2

   a) Funktion f und Ableitung f'

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 - x + 3$$
$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 1$$

   und daraus (ohne Beweis)

$$Max(-0.15\,;\,3.08) \quad \text{bzw.} \quad Min(2.15\,;\,-3.08)$$

   b) Die Ableitung f'' wird ausgehend von f' berechnet.

$$f''(x) = 6\,x - 6$$

   c) Mit Hilfe von f'', d.h. mit der Krümmung, folgt der Beweis. Wegen

$$f''(-0.15) = 6 \cdot (-0.15) - 6 < 0$$

   liegt bei $x = -0.15$ ein Maximum und wegen

$$f''(2.15) = 6 \cdot 2.15 - 6 > 0$$

   bei $x = 2.15$ ein Minimum.

2. Lösung zu Arbeitsblatt S4B035D1

a) Funktion f und Ableitung f'

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{(x-2)\,(x+1)}{x-3}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 6\,x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)\,(x-5)}{(x-3)^2}$$

und daraus (ohne Beweis)

$$Max(1\,;1) \quad \text{bzw.} \quad Min(5\,;9)$$

b) Die Ableitung f'' wird ausgehend von f' berechnet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2\,x-6)\cdot(x-3)^2 - (x^2 - 6\,x + 5)\cdot 2\,(x-3)}{(x-3)^4} \\ &= 2\,\frac{(x-3)\,(x-3) - (x^2 - 6\,x + 5)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

c) Mit Hilfe von f'', d.h. mit der Krümmung, folgt der Beweis. Wegen

$$f''(1) = \frac{8}{(1-3)^3} < 0$$

liegt bei $x = 1$ ein Maximum und wegen

$$f''(5) = \frac{8}{(5-3)^3} > 0$$

bei $x = 5$ ein Minimum.

3. Lösung zu Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 1

a) Funktion f und Ableitung f'

$$f(x) = -\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = -\frac{(x+2)\,(x-1)}{x+3}$$
$$f'(x) = -\frac{x^2 + 6\,x + 5}{(x+3)^2} = -\frac{(x+1)\,(x+5)}{(x+3)^2}$$

und daraus (ohne Beweis)

$$Min(-5\,;9) \quad \text{bzw.} \quad Max(-1\,;1)$$

b) Die Ableitung f'' wird ausgehend von f' berechnet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= -\frac{(2\,x+6)\cdot(x+3)^2 - (x^2 + 6\,x + 5)\cdot 2\,(x+3)}{(x+3)^4} \\ &= -2\,\frac{(x+3)\,(x+3) - (x^2 + 6\,x + 5)}{(x+3)^3} = -\frac{8}{(x+3)^3} \end{aligned}$$

c) Mit Hilfe von f'', d.h. mit der Krümmung, folgt der Beweis. Wegen

$$f''(-5) = -\frac{8}{((-5)+3)^3} > 0$$

liegt bei $x = -5$ ein Minimum und wegen

$$f''(-1) = -\frac{8}{((-1)+3)^3} < 0$$

bei $x = -1$ ein Maximum.

4. Lösung zu Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 2

   a) Funktion f und Ableitung f'

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x-2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

   und daraus (ohne Beweis)

$$Max(0\,;1) \quad \text{bzw.} \quad Min(4\,;9)$$

   b) Die Ableitung f'' wird ausgehend von f' berechnet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - (x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= 2\,\frac{(x-2)(x-2) - (x^2-4x)}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

   c) Mit Hilfe von f'', d.h. mit der Krümmung, folgt der Beweis. Wegen

$$f''(0) = \frac{8}{(0-2)^3} < 0$$

   liegt bei $x = 0$ ein Maximum und wegen

$$f''(4) = \frac{8}{(4-2)^3} > 0$$

   bei $x = 4$ ein Minimum.

5. Lösung zu Arbeitsblatt S4B035D2, Aufgabe 3

   a) Funktion f und Ableitung f'

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x-1)^2}{x-3}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

   und daraus (ohne Beweis)

$$Max(1\,;0) \quad \text{bzw.} \quad Min(5\,;8)$$

   b) Die Ableitung f'' wird ausgehend von f' berechnet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x-6)\cdot(x-3)^2 - (x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\ &= 2\,\frac{(x-3)(x-3) - (x^2-6x+5)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

   c) Mit Hilfe von f'', d.h. mit der Krümmung, folgt der Beweis. Wegen

$$f''(1) = \frac{8}{(1-3)^3} < 0$$

   liegt bei $x = 1$ ein Maximum und wegen

$$f''(5) = \frac{8}{(5-3)^3} > 0$$

   bei $x = 5$ ein Minimum.