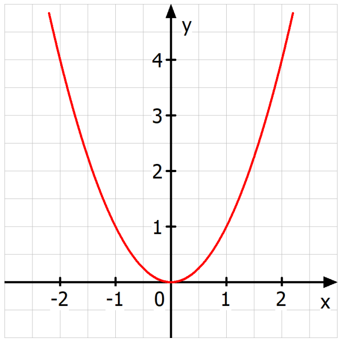
Gegeben sind drei Potenzfunktionen mit

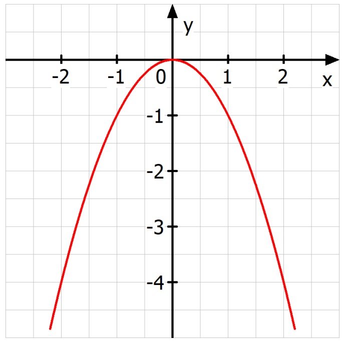
$$f(x) = x^2, \qquad f(x) = -x^2 \qquad \text{und} \qquad f(x) = x^3$$

Gesucht sind die Extrema, d.h. Minima oder Maxima.

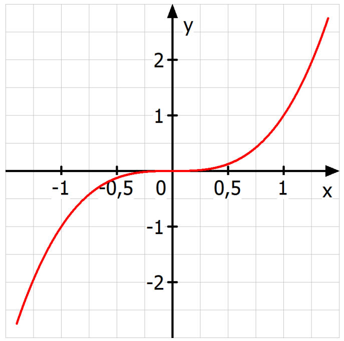
Wegen $D = \mathbb{R}$ hat keine dieser Funktionen Randpunkte. Falls eine dieser Kurven ein lokales Minimum oder Maximum haben sollte, müsste dort die Tangente an die Kurve zwingend horizontal verlaufen. Solche Kurvenpunkte, wo $f'(x) = 0$ gilt, nennt man kritische Punkte.



$f(x) = x^2$ mit $W = \mathbb{R}_0^+$



$f(x) = -x^2$ mit $W = \mathbb{R}_0^-$



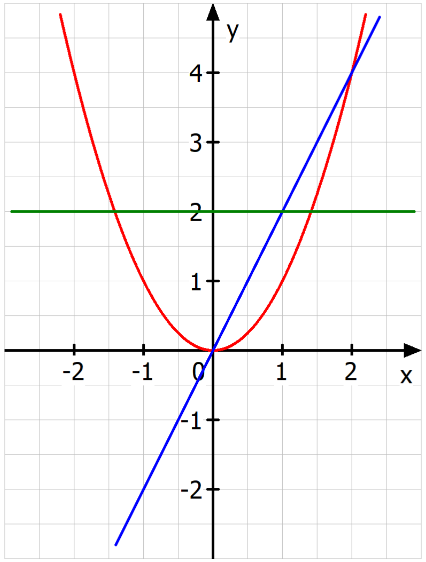
$f(x) = x^3$ mit $W = \mathbb{R}$

Funktion f	$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2$	$f(x) = x^3$
1. Ableitung f'	$f'(x) = 2\,x$	$f'(x) = -2\,x$	$f'(x) = 3\,x^2$
Kritischer Punkt x_p	$2\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$-2\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$3\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Ursprung, Eigenschaft	Minimum	Maximum	Wendepunkt
Krümmung	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	keine

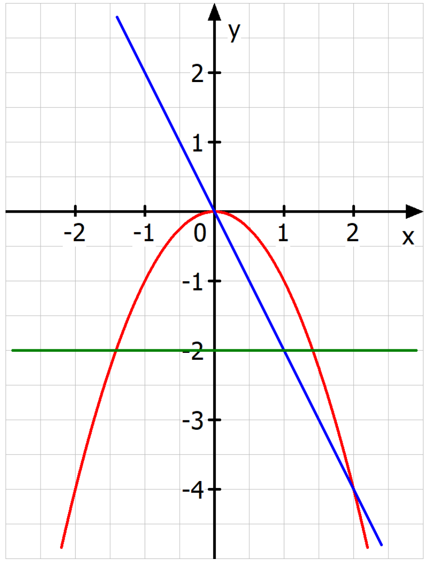
Wie man sieht, haben alle drei Kurven im Ursprung ihren kritischen Punkt und trotzdem unterscheiden sie sich fundamental. Die erste Kurve hat dort ein Minimum, die zweite ein Maximum und die dritte einen Wendepunkt, wobei dort die Krümmung von rechts auf links oder umgekehrt wechselt. Offensichtlich ist es die Krümmung einer Kurve, welche über Minimum, Maximum oder Wendepunkt entscheidet.

Die erste Ableitung f' einer Funktion f steht für die Steigung der Kurve und die zweite Ableitung f'' für deren Krümmung. Um entscheiden zu können, ob in einem kritischen Punkt ein Minimum, ein Maximum oder ein Wendepunkt vorliegt, muss man in diesem Punkt die Krümmung untersuchen, d.h. man berechnet die 2. Ableitung f'' und setzt dort die x-Koordinate des kritischen Punktes ein, siehe Tabelle auf der nächsten Seite.

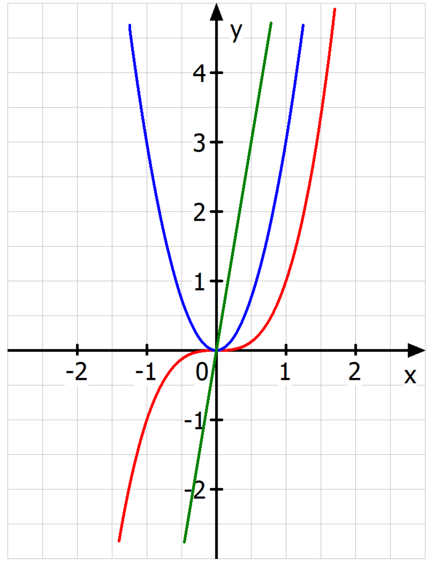
Die Zeichnungen zeigen je die Funktion f (rote Kurve), die zugehörige 1. Ableitung f' (blaue Kurve) und die 2. Ableitung f'' (grüne Kurve).



$f'(x) = 2\,x$ und $f''(x) = 2$



$f'(x) = -2\,x$ und $f''(x) = -2$



$f'(x) = 3\,x^2$ und $f''(x) = 6\,x$

Funktion f	$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2$	$f(x) = x^3$
1. Ableitung f'	$f'(x) = 2\,x$	$f'(x) = -2\,x$	$f'(x) = 3\,x^2$
Kritischer Punkt x_p	$2\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$-2\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$3\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. Ableitung f''	$f''(x) = 2$	$f''(x) = -2$	$f''(x) = 6\,x$
$f''(x_p)$	$f''(0) = 2 > 0$	$f''(0) = -2 < 0$	$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$
Krümmung	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	keine
Eigenschaft	Minimum	Maximum	Wendepunkt

Wenn in einem kritischen Punkt $f''(x_p) > 0$ gilt, dann ist die Kurve dort linksgekrümmt (konvex) und es handelt sich um ein Minimum. Gilt im kritischen Punkt hingegen $f''(x_p) < 0$, dann ist die Kurve dort rechtsgekrümmt (konkav) und es handelt sich um ein Maximum. Für $f''(x_p) = 0$ ist es weder ein Minimum noch ein Maximum.

Gegeben sind drei Polynomfunktionen mit

$$f(x) = x^2 - 2\,x, \qquad f(x) = -x^2 + 2\,x$$

und

$$f(x) = -x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$$

Gesucht ist je die Kurvendiskussion, d.h. Nullstellen, y-Achsenabschnitt, Extrema und Wendepunkte.

---

1. a) Es gibt zwei Nullstellen mit VZW bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ wegen

$$f(x) = x^2 - 2\,x = x\,(x-2) = 0$$

wobei x_1 zugleich der y-Achsenabschnitt ist.

b) Für die Ableitungen gilt

$$f'(x) = 2\,x - 2$$
$$f''(x) = 2$$
$$f'''(x) = 0$$

c) Wegen

$$f'(x) = 2\,x - 2 = 2\,(x-1) = 0$$

hat f einen kritischen Punkt bei $x_3 = 1$, d.h. dort könnte ein Extrema auftreten und wegen

$$f''(1) = 2 > 0 \quad \text{sowie} \quad y_3 = f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$$

liegt ein Minimum bei

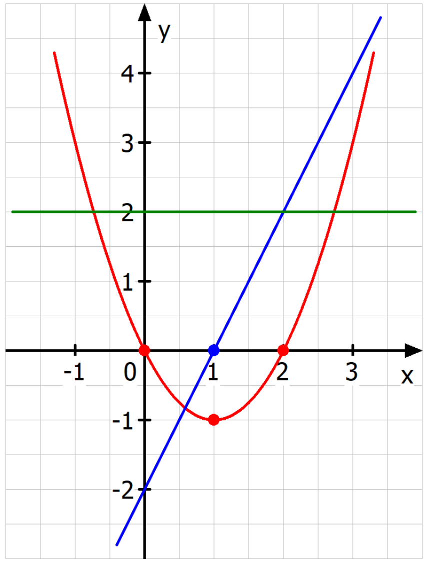
$$Min(1\,;\,-1)$$

d) Wegen

$$f''(x) = 2 \neq 0$$

hat f' keinen krit. Punkt und damit hat f keinen Wendepunkt.

e) Trägt man alle Eigenschaften von f ein, erhält man den roten Graph $G(f)$, und mit den Ableitungen auch den blauen und grünen Graph $G(f')$ bzw. $G(f'')$.



$f'(x) = 2\,(x-1)$ und $f''(x) = 2$

Die Ableitung f' steht für die Steigung und f'' für die Krümmung, siehe die folgende Tabelle mit den Steigungs- und Krümmungsintervallen.

$x \in I$	$f'(x)$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,1[$	< 0		streng monoton fallend
$]1\,;\,\infty[$	> 0		streng monoton wachsend
$]-\infty\,;\,\infty[$		> 0	linksgekrümmt

Genau dort, wo die blaue Kurve $G(f')$ ihre Nullstelle hat, hat die rote Kurve $G(f)$ eine Steigung von Null, d.h. ihren kritischen Punkt.

2. a) Es gibt zwei Nullstellen mit VZW bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ wegen

$$f(x) = -x^2 + 2\,x = -x\,(x-2) = 0$$

wobei x_1 zugleich der y-Achsenabschnitt ist.

b) Für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\,x + 2 \\ f''(x) &= -2 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

c) Wegen

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\,x + 2 \\ &= -2\,(x-1) = 0 \end{aligned}$$

hat f einen kritischen Punkt bei $x_3 = 1$, d.h. dort könnte ein Extrema auftreten und wegen

$$f''(1) = -2 < 0 \quad \text{sowie} \quad y_3 = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

liegt ein Maximum bei

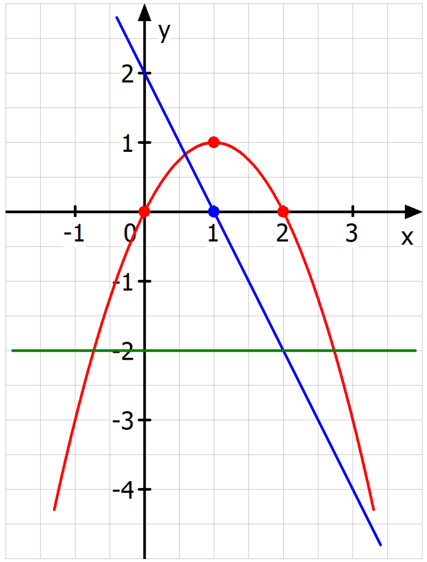
$$Max(1\,;\,1)$$

d) Wegen

$$f''(x) = -2 \neq 0$$

hat f' keinen kritischen Punkt und damit hat f keinen Wendepunkt.

e) Trägt man alle Eigenschaften von f ein, erhält man den roten Graph $G(f)$, und mit den Ableitungen auch den blauen und grünen Graph $G(f')$ bzw. $G(f'')$.



$$f'(x) = -2\,(x-1) \text{ und } f''(x) = -2$$

Die Ableitung f' steht für die Steigung und f'' für die Krümmung, siehe die folgende Tabelle mit den Steigungs- und Krümmungsintervallen.

$x \in I$	$f'(x)$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\,1[$	> 0		streng monoton wachsend
$]1\,;\,\infty[$	< 0		streng monoton fallend
$]-\infty\,;\,\infty[$		< 0	rechtsgekrümmt

Genau dort, wo die blaue Kurve $G(f')$ ihre Nullstelle hat, hat die rote Kurve $G(f)$ eine Steigung von Null, d.h. ihren kritischen Punkt.

3. a) Durch Probieren findet man

$$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

und eine Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 \\ &= -(x-2)\,(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

wobei der quadratische Term die Diskriminante

$$D = b^2 - 4\,a\,c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

hat und damit nicht weiter zerlegbar ist.

Wegen

$$f(x) = -(x-2)\,(x^2 - x + 1) = 0$$

gibt es genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = 2$ und für den y-Achsenabschnitt gilt

$$f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

b) Für die 1. Ableitung gilt

$$f'(x) = -3\,x^2 + 6\,x - 3$$

d.h. es kann maximal zwei Extrema geben.

Für die 2. Ableitung gilt

$$f''(x) = -6\,x + 6$$

d.h. es kann maximal einen Wendepunkt geben.

Für die 3. Ableitung gilt

$$f'''(x) = -6$$

c) Wegen

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\,x^2 + 6\,x - 3 \\ &= -3\,(x^2 - 2\,x + 1) \\ &= -3\,(x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

hat f einen kritischen Punkt bei $x_3 = 1$, d.h. dort könnte ein Extrema auftreten und wegen

$$f''(1) = -6 \cdot 1 + 6 = 0$$

liegt dort weder ein Minimum noch ein Maximum, denn dazu müsste

$$f''(1) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(1) < 0$$

gelten.

d) Wegen

$$\begin{aligned} f''(x) &= -6\,x + 6 \\ &= -6\,(x-1) = 0 \end{aligned}$$

hat f' einen kritischen Punkt bei $x_3 = 1$, d.h. dort könnte ein Wendepunkt auftreten und wegen

$$f'''(1) = -6 \neq 0$$

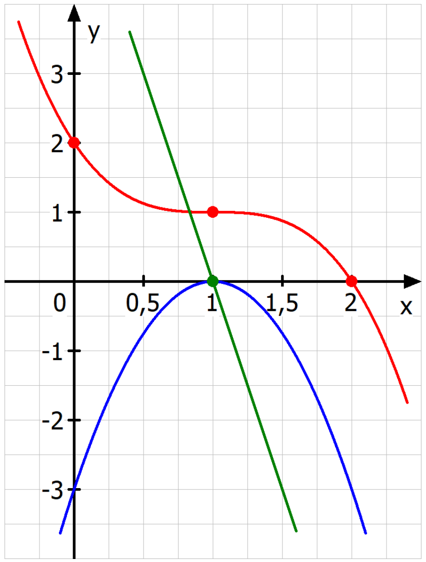
sowie

$$y_3 = f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1$$

liegt ein Wendpunkt bei

$$W(1\,;\,1)$$

e) Trägt man alle Eigenschaften von f ein, erhält man den roten Graph $G(f)$, und mit den Ableitungen auch den blauen und grünen Graph $G(f')$ bzw. $G(f'')$.



$f'(x) = -3\,(x-1)^2$ und $f''(x) = -6\,(x-1)$

Die Ableitung f' steht für die Steigung und f'' für die Krümmung, siehe die folgende Tabelle mit den Steigungs- und Krümmungsintervallen.

$x \in I$	$f'(x)$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;1[$	< 0		streng monoton fallend
$]1\,;\infty[$	< 0		streng monoton fallend
$]-\infty\,;1[$		> 0	linksgekrümmt
$[1\,;1]$		$= 0$	nicht gekrümmt
$]1\,;\infty[$		< 0	rechtsgekrümmt

Genau dort, wo die grüne Kurve $G(f'')$ ihre Nullstelle hat, hat die rote Kurve $G(f)$ eine Krümmung von Null.

Die beiden Steigungsintervalle könnte man zu einem zusammenfassen, wobei man dann nicht mehr von „streng monoton fallend“, sondern nur noch von „monoton fallend“ sprechen darf, weil die Steigung im Wendepunkt gleich Null ist.

$x \in I$	$f'(x)$	$f''(x)$	$G(f)$
$]-\infty\,;\infty[$	≤ 0		monoton fallend
$]-\infty\,;1[$		> 0	linksgekrümmt
$[1\,;1]$		$= 0$	nicht gekrümmt
$]1\,;\infty[$		< 0	rechtsgekrümmt