Gegeben sind folgende Ableitungsregeln, vergleiche FS 10.3.1

$f(x)$	$f'(x)$	Bezeichnung
$\dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$	Kehrwertregel
$\dfrac{\alpha}{v(x)}$	$-\alpha\,\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$	Kehrwertregel mit $\alpha \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$	Quotientenregel

Mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sind ausserdem die Ableitungen einiger Grundfunktionen gegeben, vergleiche FS 10.3.2 und FS 10.3.3

$f(x)$	$f'(x)$	Bezeichnung
e^x	e^x	Exponentialfunktion (natürliche)
b^x	$\ln(b)\cdot b^x$	Exponentialfunktion
$\ln(x)$	$1/x$	Logarithmusfunktion (natürliche)
$\log_b(x)$	$1/\ln(b)\cdot 1/x$	Logarithmusfunktion
$\sin(x)$	$\cos(x)$	Sinusfunktion
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	Cosinusfunktion
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	Tangensfunktion
$\cot(x)$	$-1/\sin^2(x)$	Cotangensfunktion

1. Beweise, dass die Kehrwertregel ein Spezialfall der Quotientenregel ist.

2. Beweise die Ableitungsregel

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

wobei die Beziehung $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ und die Quotientenregel verwendet werden darf.

3. Beweise die Ableitungsregel

$$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

wobei die Beziehung $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$ und die Quotientenregel verwendet werden darf.

Gesucht ist je die erste Ableitung, soweit als möglich vereinfacht. Man überlege sich bei jeder Aufgabe, ob zwingend mit der Quotientenregel abgeleitet werden muss.

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(x)}$

5. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\ln(3)}$

6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^{-3}}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos(x)}$

8. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - \sqrt{2}\,x}$

9. $f(x) = \dfrac{-\sqrt{x}\,\sqrt{3}}{\log_3(x)}$

---

1. Die Quotientenregel kann angewendet werden, wenn sich eine Funktion f aus dem Quotienten zweier Teilfunktionen u und v zusammensetzt. Dabei kann u auch eine konstante Funktion sein, d.h. es gilt mit $u(x) = c$ auch $u'(x) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c}{v(x)} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{0\cdot v(x) - c\cdot v'(x)}{v^2(x)} = -\,c\,\frac{v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Dies ist die zweite Kehrwertregel und mit $c = 1$ folgt daraus die erste Kehrwertregel.

2. Mit der Quotientenregel gilt

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{\cos(x)\ \cos(x) - \sin(x)\ (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

wobei für die letzte Umformung der trigonometrische Pythagoras

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

verwendet wurde. Die alternative Lösung ist

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

3. Mit der Quotientenregel gilt

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \Rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\ \sin(x) - \cos(x)\ \cos(x)}{\sin^2(x)}$$
$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

wobei für die letzte Umformung der trigonometrische Pythagoras

$$-\sin^2(x) - \cos^2(x) = -1$$

verwendet wurde. Die alternative Lösung ist

$$f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$
$$= \frac{-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

4. Man kann diese Aufgabe mit der Quotientenregel lösen

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sin(x)} \quad \Rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{0 \cdot \sin(x) - \sqrt{2} \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

oder einfacher mit der Kehrwertregel

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sqrt{2}\,\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

denn der Zähler $\sqrt{2} \approx 1.414$ ist konstant.

5. Man kann diese Aufgabe mit der Quotientenregel lösen

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(3)} \quad \Rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \ln(3) - \sin(x) \cdot 0}{\ln^2(3)} = \frac{\cos(x)}{\ln(3)}$$

oder einfacher mit der Faktorregel

$$f(x) = \frac{1}{\ln(3)}\ \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(3)}\ \cos(x)$$

denn der Nenner $\ln(3)$ ist konstant.

6. Man kann diese Aufgabe mit der Quotientenregel lösen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x^{-3}} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{2\,x \cdot x^{-3} - x^2 \cdot (-3)\,x^{-4}}{(x^{-3})^2} \\ &= \frac{2\,x^{-2} + 3\,x^{-2}}{x^{-6}} = 5\,x^{-2}\,x^6 = 5\,x^4 \end{aligned}$$

oder einfacher mit der Potenzregel

$$f(x) = \frac{x^2}{x^{-3}} = x^2\,x^3 = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\,x^4$$

denn es gilt das Potenzgesetz $a^m / a^n = a^{m-n}$, vergleiche FS 2.6.

7. Weder u noch v ist konstant, daher gilt zwingend mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{2\,x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{x}{\cos(x)}\,\frac{2\,\cos(x) + x\,\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x\,(2 + x\,\tan(x))}{\cos(x)} \end{aligned}$$

8. Weder u noch v ist konstant, daher gilt zwingend mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x^2 - \sqrt{2}\,x} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{1/x \cdot (x^2 - \sqrt{2}\,x) - \ln(x) \cdot (2\,x - \sqrt{2})}{(x^2 - \sqrt{2}\,x)^2} \\ &= \frac{(x - \sqrt{2}) + \ln(x)\,(\sqrt{2} - 2\,x)}{x^2\,(x - \sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

9. Mit der Faktorregel kann man den konstanten Faktor $-\sqrt{3}$ übernehmen und mit der Potenzregel gilt

$$u(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{2}\,x^{-1/2} = \frac{1}{2\,x^{1/2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Mit dem Basiswechselsatz und der Regel für Logarithmusfunktionen gilt

$$v(x) = \log_3(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{\ln(3)\,x} = \frac{1}{\ln(3)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x}}$$

und schliesslich mit der Quotientenregel und vereinfacht

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x}}{\log_3(x)} \\ &= -\sqrt{3}\,\frac{x^{1/2}\,\ln(3)}{\ln(x)} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= -\sqrt{3}\,\frac{\left(\frac{1}{2\,\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(3)} - \sqrt{x}\,\frac{1}{\ln(3)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x}}\right)}{(\log_3(x))^2} \\ &= -\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{\ln(3)\,\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{2} - 1\right)}{(\ln(x)/\ln(3))^2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{\ln(3)\,\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{2} - 1\right)\frac{\ln^2(3)}{\ln^2(x)} \\ &= \frac{\sqrt{3}\,\ln(3)}{\sqrt{x}\,\ln^2(x)}\left(1 - \frac{\ln(x)}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\,\ln(3)\,(2 - \ln(x))}{2\,\sqrt{x}\,\ln^2(x)} \end{aligned}$$

Mathematik ist, wenn Du nicht verstehst, was Du nicht verstehst.