Gegeben sind folgende Ableitungsregeln, vergleiche FS 10.3.1

$f(x)$	$f'(x)$	Bezeichnung
$\alpha \cdot u(x)$	$\alpha \cdot u'(x)$	Faktorregel mit $\alpha \in \mathbb{R}$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	Produktregel

Mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sind ausserdem die Ableitungen einiger Grundfunktionen gegeben, vergleiche FS 10.3.2 und FS 10.3.3

$f(x)$	$f'(x)$	Bezeichnung
e^x	e^x	Exponentialfunktion (natürliche)
b^x	$\ln(b) \cdot b^x$	Exponentialfunktion
$\ln(x)$	$1/x$	Logarithmusfunktion (natürliche)
$\log_b(x)$	$1/\ln(b) \cdot 1/x$	Logarithmusfunktion
$\sin(x)$	$\cos(x)$	Sinusfunktion
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	Cosinusfunktion

1. Beweise, dass die Faktorregel ein Spezialfall der Produktregel ist.

2. Beweise die Ableitungsregel

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \frac{1}{x}$$

wobei der Basiswechselsatz $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ und die Faktorregel verwendet werden darf.

Gesucht ist je die erste Ableitung, soweit als möglich vereinfacht. Man überlege sich bei jeder Aufgabe, ob zwingend mit der Produktregel abgeleitet werden muss.

3. $f(x) = \sqrt{2}\,\sin(x)$
4. $f(x) = \cos(x)\,\log_2(8.1)$
5. $f(x) = x^2\,x^3$
6. $f(x) = x^{-2.1}\,x^{2.1}$
7. $f(x) = e^x\,x^3$
8. $f(x) = x^2\,\cos(x)$
9. $f(x) = \ln(x)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x)$
10. $f(x) = -\sqrt{x}\,\sqrt{3}\,\log_3(x)$

---

1. Die Produktregel kann angewendet werden, wenn sich eine Funktion f aus dem Produkt zweier Teilfunktionen u und v zusammensetzt. Dabei kann z.B. u auch eine konstante Funktion sein, d.h. es gilt mit $u(x) = c$ auch $u'(x) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= c \cdot v(x) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 0 \cdot v(x) + c \cdot v'(x) \\ &= c \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Dies ist die Faktorregel, einfach mit anderen Bezeichnungen als oben.

2. Mit dem Basiswechselsatz und der Faktorregel gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\ln(b)} \ln(x) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{1}{\ln(b)} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

3. Man kann diese Aufgabe mit der Produktregel lösen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\,\sin(x) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= 0 \cdot \sin(x) + \sqrt{2} \cdot \cos(x) = \sqrt{2}\,\cos(x) \end{aligned}$$

oder einfacher mit der Faktorregel

$$f(x) = \sqrt{2}\,\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sqrt{2}\,\cos(x)$$

denn $\sqrt{2} \approx 1.414$ ist ein konstanter Faktor.

4. Man kann diese Aufgabe mit der Produktregel lösen

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)\ \log_2(8.1) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= (-\sin(x)) \cdot \log_2(8.1) + \cos(x) \cdot 0 = -\log_2(8.1)\ \sin(x) \end{aligned}$$

oder einfacher mit der Faktorregel

$$f(x) = \log_2(8.1)\ \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\log_2(8.1)\ \sin(x)$$

denn $\log_2(8.1) \approx 3$ ist ein konstanter Faktor.

5. Man kann diese Aufgabe mit der Produktregel lösen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\, x^3 \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= 2\,x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3\,x^2 = 5\,x^4 \end{aligned}$$

oder einfacher mit der Potenzregel

$$f(x) = x^2\, x^3 = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\,x^4$$

denn es gilt das Potenzgesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, vergleiche FS 2.6.

6. Man kann diese Aufgabe mit der Produktregel lösen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-2.1}\, x^{2.1} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= (-2.1)\, x^{-3.1} \cdot x^{2.1} + x^{-2.1} \cdot 2.1\, x^{1.1} \\ &= (-2.1)\, x^{-1} + 2.1\, x^{-1.1} = 0 \end{aligned}$$

oder einfacher mit der Regel für konstante Funktionen

$$f(x) = x^{-2.1}\, x^{2.1} = x^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

denn es gilt das Potenzgesetz $a^0 = 1$, vergleiche FS 2.6.

7. Kein Faktor ist konstant, daher gilt zwingend mit der Produktregel

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x\, x^3 \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3\,x^2 \\ &= e^x\, x^2\,(x+3) \end{aligned}$$

8. Kein Faktor ist konstant, daher gilt zwingend mit der Produktregel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\, \cos(x) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= 2\,x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (-\sin(x)) \\ &= x\,(2\,\cos(x) - x\,\sin(x)) \end{aligned}$$

9. Kein Faktor ist konstant, daher gilt zwingend mit der Produktregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x) \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \cdot (x^2 - \sqrt{2}\,x) + \ln(x) \cdot (2\,x - \sqrt{2}) \\ &= x - \sqrt{2} + \ln(x) \cdot (2\,x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

10. Mit der Faktorregel kann man den konstanten Faktor $-\sqrt{3}$ übernehmen und mit der Potenzregel gilt

$$u(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\,x^{1/2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Mit dem Basiswechselsatz und der Regel für Logarithmusfunktionen gilt

$$v(x) = \log_3(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{\ln(3)\,x} = \frac{1}{\ln(3)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x}}$$

und schliesslich mit der Produktregel und vereinfacht

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sqrt{3}\,\sqrt{x}\,\log_3(x) = -\sqrt{3}\,x^{1/2}\,\frac{\ln(x)}{\ln(3)} \quad \Rightarrow \\ f'(x) &= -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2\,\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(3)} + \sqrt{x}\,\frac{1}{\ln(3)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{\ln(3)\,\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{2} + 1\right) = -\frac{\sqrt{3}\,(\ln(x)+2)}{2\,\ln(3)\,\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Wow, ist Mathematik nicht wunderschön?!