Gegeben ist sind einige gebrochenrationale Funktionen, vergleiche FS 8.7

1. $$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x - 3}$$

2. $$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

3. $$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

Gesucht ist je der Graph, d.h. eine vollständige Diskussion.

---

1. Eine Linearfaktorzerlegung von f ergibt

$$f(x) = -\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = -\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}$$

und damit die Nullstellen

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

sowie die Polstelle

$$x_3 = -3$$

alle mit VZW. Es gilt $f(0) = 2/3$ und eine Polynomdivision liefert

$$a(x) = -x + 2 \quad \text{sowie} \quad d(x) = \frac{4}{-x-3} \approx \frac{1}{-x}$$

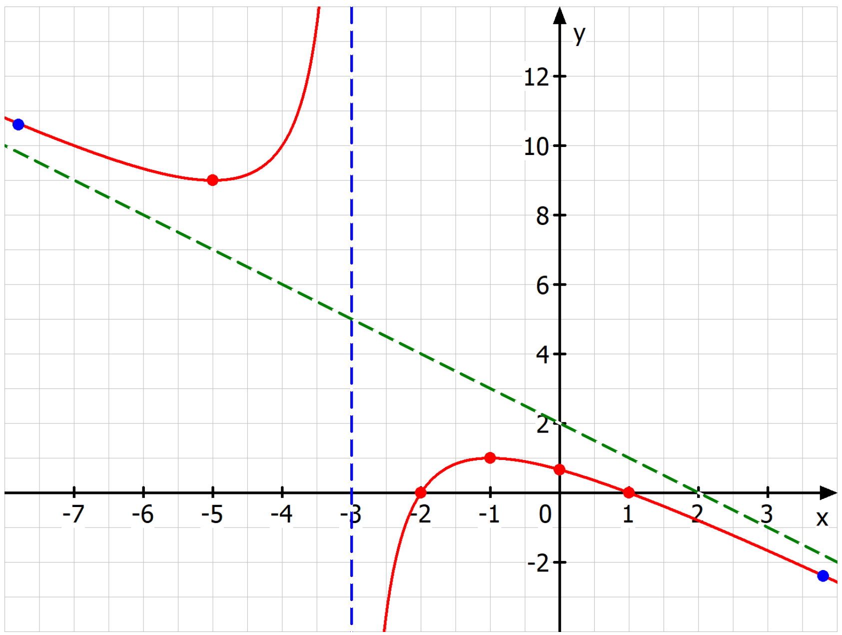
d.h. der Graph von f verläuft „rechts unterhalb“ bzw. „links oberhalb“ der Asymptote, vergleiche die blauen Punkte in der Zeichnung.

Mit der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= -\frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x-2)\,1}{(x+3)^2} \\ &= -\frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2} = -\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2} = 0 \end{aligned}$$

was die kritischen Punkte $x_4 = -1$ und $x_5 = -5$ ergibt. Diese einsetzen in f führt zu den lokalen Extrema

$$Min(-5\,;\,9) \quad \text{bzw.} \quad Max(-1\,;\,1)$$



Der Punkt $(-3\,;\,5)$ ist das Symmetriezentrum der Kurve.

2. Eine Linearfaktorzerlegung von f ergibt

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \frac{(x+2)\,(x-1)}{x-2}$$

und damit die Nullstellen

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

sowie die Polstelle

$$x_3 = 2$$

alle mit VZW. Es gilt

$$f(0) = 1$$

und eine Polynomdivision liefert

$$a(x) = x + 3 \quad \text{sowie} \quad d(x) = \frac{4}{x-2} \approx \frac{1}{x}$$

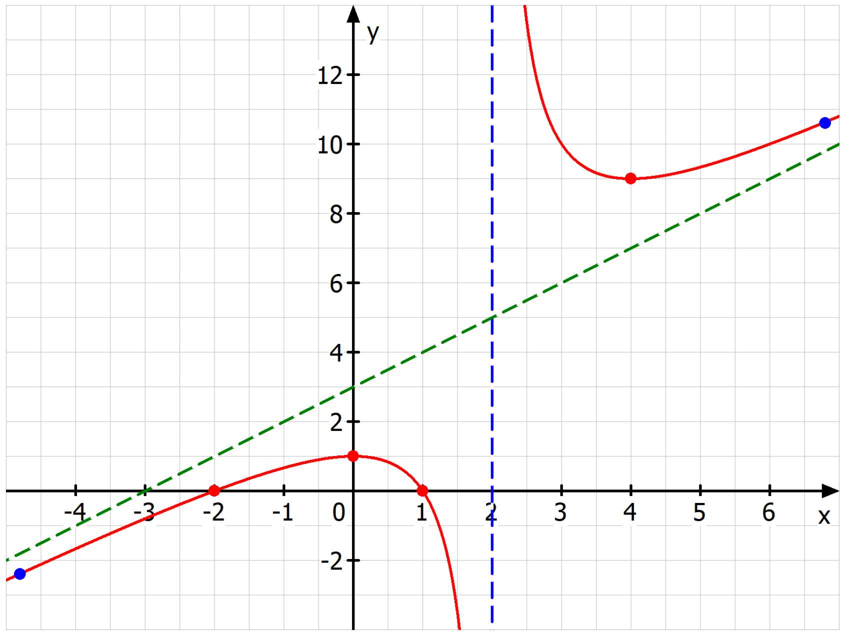
d.h. der Graph von f verläuft „rechts oberhalb“ bzw. „links unterhalb“ der Asymptote, vergleiche die blauen Punkte in der Zeichnung.

Mit der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2\,x+1)\,(x-2) - (x^2+x-2)\,1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4\,x}{(x-2)^2} = \frac{x\,(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \end{aligned}$$

was die kritischen Punkte $x_4 = 0$ und $x_5 = 4$ ergibt. Diese einsetzen in f führt zu den lokalen Extrema

$$Max(0\,;1) \quad \text{bzw.} \quad Min(4\,;9)$$



Der Punkt $(2\,;5)$ ist das Symmetriezentrum der Kurve und der Schnittpunkt mit der y-Achse ist zugleich das lokale Maximum der Kurve. Da die Kurve links und rechts der Polstelle beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft, hat die Funktion keine globalen Extrema.

3. Eine Linearfaktorzerlegung von f ergibt

$$f(x) = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{x - 3} = \frac{(x-1)^2}{x-3}$$

und damit die Nullstelle

$$x_1 = 1$$

ohne VZW sowie die Polstelle

$$x_2 = 3$$

mit VZW. Es gilt

$$f(0) = -1/3$$

und eine Polynomdivision liefert

$$a(x) = x + 1 \quad \text{sowie} \quad d(x) = \frac{4}{x-3} \approx \frac{1}{x}$$

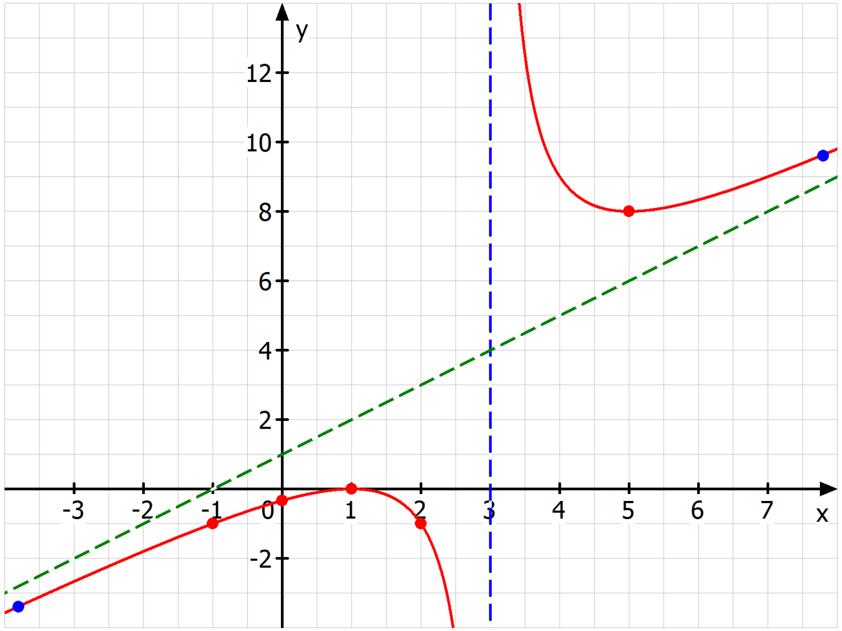
d.h. der Graph von f verläuft „rechts oberhalb" bzw. „links unterhalb" der Asymptote, vergleiche die blauen Punkte in der Zeichnung.

Mit der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2\,x-2)\,(x-3) - (x^2 - 2\,x + 1)\,1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6\,x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)\,(x-5)}{(x-3)^2} = 0 \end{aligned}$$

was die kritischen Punkte $x_4 = 1$ und $x_5 = 5$ ergibt. Diese einsetzen in f führt zu den lokalen Extrema

$$Max(1\,;0) \quad \text{bzw.} \quad Min(5\,;8)$$



Der Punkt $(3\,;4)$ ist das Symmetriezentrum der Kurve und die zweifache Nullstelle bei $x_1 = 1$ ist zugleich das lokale Maximum der Kurve. Da die Kurve links und rechts der Polstelle beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft, hat die Funktion keine globalen Extrema.

4. Abschliessende Bemerkung: eigentlich müsste man bei allen Funktionen noch die zweite Ableitung f'' berechnen, um überprüfen zu können, ob es sich tatsächlich um eine Minimum bzw. Maximum handelt. Mehr dazu später.