Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f, vergleiche FS 8.7, mit

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht ist der Graph der Funktion, d.h. deren vollständige Diskussion.

---

1. Wegen
$$Z(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)\,(x+1) = 0$$
hat f zwei Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, beide mit VZW.

2. Wegen
$$N(x) = x - 3 = 0$$
hat f eine Polstelle mit VZW bei $x_3 = 3$ und es gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

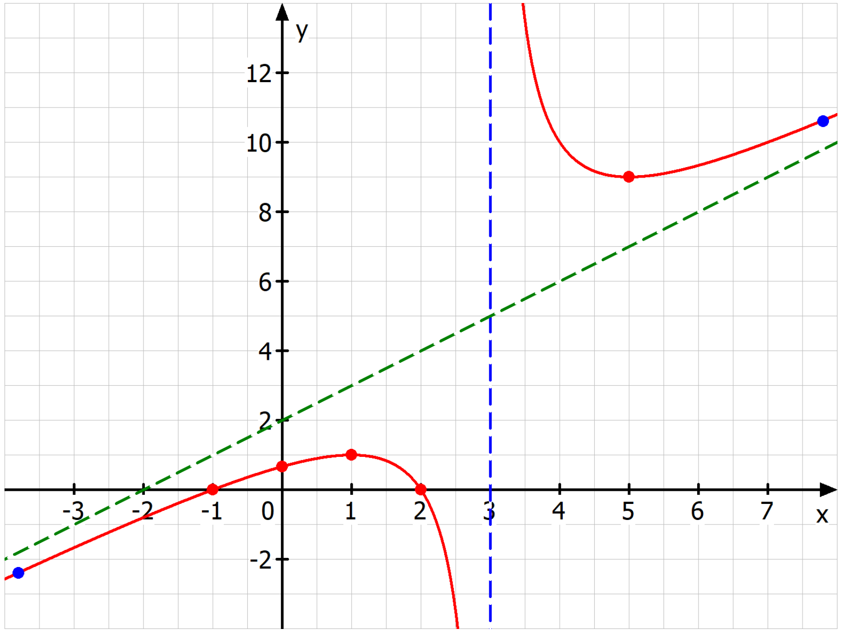
3. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt
$$f(0) = \frac{2}{3}$$

4. Eine Polynomdivision liefert die Asymptote a und die Differenz d mit
$$a(x) = x + 2 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{4}{x-3} \approx \frac{1}{x}$$
und wegen
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+$$
sowie
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$
verläuft der Graph von f „rechts oberhalb“ bzw. „links unterhalb“ der Asymptote, siehe die blauen Punkte in der Zeichnung.

5. Mit
$$u(x) = x^2 - x - 2 \quad \text{und} \quad v(x) = x - 3$$
sowie den bekannten Ableitungsregeln erhält man
$$u'(x) = 2\,x - 1 \quad \text{bzw.} \quad v'(x) = 1$$
und eingesetzt in die Quotientenregel
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2\,x-1)\,(x-3) - (x^2 - x - 2)\,1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6\,x + 5}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-1)\,(x-5)}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

6. Wegen
$$\frac{z}{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$
gilt
$$f'(x) = \frac{(x-1)\,(x-5)}{(x-3)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\,(x-5) = 0$$
d.h. die kritischen Punkte liegen bei
$$x_4 = 1 \quad \text{und} \quad x_5 = 5$$
Setzt man diese in die Funktion f ein, erhält man die zugehörigen y-Werte und damit die beiden gesuchten Extrema
$$Max(1\,;\,1) \quad \text{bzw.} \quad Min(5\,;\,9)$$

7. Wie man sieht, liegen die x-Werte der Extrema genau dort, wo die erste Ableitung ihre Nullstellen hat.



Eigentlich müsste man noch die zweite Ableitung f'' berechnen, um überprüfen zu können, ob es sich tatsächlich um eine Minimum bzw. Maximum handelt. Mehr dazu später.