Gegeben ist eine gebrochenlineare Funktion f, vergleiche FS 8.8, mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

und es sollen folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wie lautet die erste Ableitung f' ?
2. Wie verhält sich die Kurve für $x \to 0^+$?
3. Wie verhält sich die Kurve für $x \to \infty$?
4. Was kann man zur Monotonie von f sagen?
5. Hat der Graph von f ein Minimum oder ein Maximum?

---

1. Wegen $f(x) = 1/x = x^{-1}$ kann man f mit der Potenzregel ableiten.

$$f'(x) = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Der Ausdruck

$$x \to 0^+$$

bedeutet, dass der x-Wert immer kleiner wird, aber positiv bleibt. Die x-Werte nähern sich von rechts her kommend immer mehr dem Ursprung, siehe folgende Wertetabelle.

x	2	1	0.5	0.25	10^{-2}	10^{-4}
$f(x)$	0.5	1	2	4	10^2	10^4
$f'(x)$	$-1/4$	-1	-4	-16	-10^4	-10^8

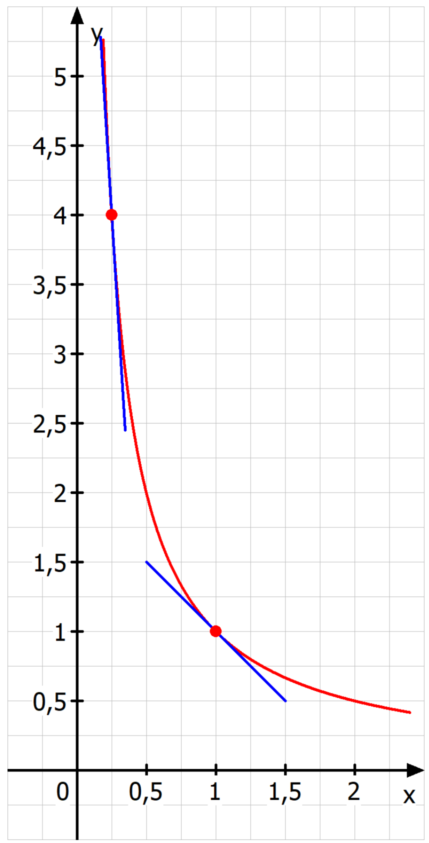
Die y-Werte werden erwartungsgemäss immer grösser und die Steigung immer negativer, siehe die folgende Zeichnung, wo die beiden Punkte

$$(0.25\,;\,4) \quad \text{und} \quad (1\,;\,1)$$

sowie die zugehörigen Tangenten mit den Steigungen

$$f'(0.25) = -16 \quad \text{bzw.} \quad f'(1) = -1$$

eingezeichnet sind.



Es gilt

$$x \to 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \to -\infty$$

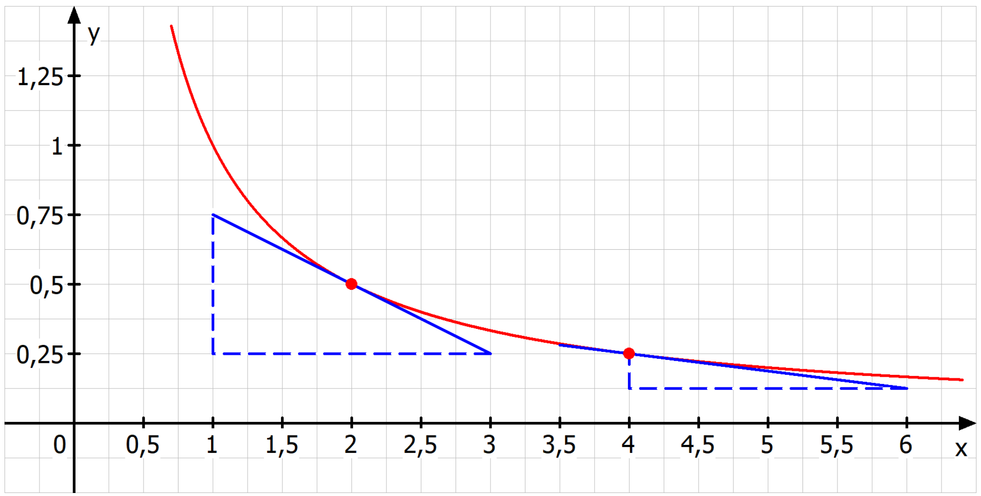
d.h. je näher ein Punkt auf der Kurve der y-Achse kommt, desto negativer die Steigung der Kurve in diesem Punkt.

3. Der Ausdruck

$$x \to \infty$$

bedeutet, dass der x-Wert immer grösser wird. Die y-Werte werden erwartungsgemäss immer kleiner und die Steigung geht gegen Null, bleibt aber negativ, siehe die folgende Wertetabelle und Zeichnung.

x	2	4	10	10^2	10^4	10^6
$f(x)$	0.5	0.25	0.1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$f'(x)$	$-1/4$	$-1/16$	-10^{-2}	-10^{-4}	-10^{-8}	-10^{-12}



Es sind die beiden Punkte $(2\,;0.5)$ und $(4\,;0.25)$ sowie die zugehörigen Tangenten mit den Steigungen

$$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.5}{2} = -1/4$$

bzw.

$$f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.125}{2} = -1/16$$

eingezeichnet. Es gilt

$$x \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \to 0^-$$

d.h. je weiter sich ein Punkt auf der Kurve nach rechts bewegt, desto kleiner die Steigung der Kurve in diesem Punkt.

4. Der Ausdruck

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

kann nicht Null werden und ist immer negativ, d.h. die Kurve ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.

5. Da die Ableitung nicht Null werden kann und die Funktion keine Randpunkte hat, gibt es weder lokale, noch globale Extrema.