Gegeben ist eine Wurzelfunktion f, vergleiche FS 8.3.3, mit

$$f(x) = \sqrt{x}$$

und es sollen folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wie lautet die erste Ableitung f' ?
2. Wie verhält sich die Kurve für $x \to 0^+$?
3. Wie verhält sich die Kurve für $x \to \infty$?
4. Was kann man zur Monotonie von f sagen?
5. Hat der Graph von f ein Minimum oder ein Maximum?

---

1. Wegen $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ kann man f mit der Potenzregel ableiten.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{-1/2} = \frac{1}{2\,x^{1/2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

2. Der Ausdruck

$$x \to 0^+$$

bedeutet, dass der x-Wert immer kleiner wird, aber positiv bleibt. Die x-Werte nähern sich von rechts her kommend immer mehr dem Ursprung, siehe folgende Wertetabelle.

x	4	1	0.5	0.25	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$f(x)$	2	1	0.707	0.5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f'(x)$	0.25	0.5	0.707	1	5	50	500

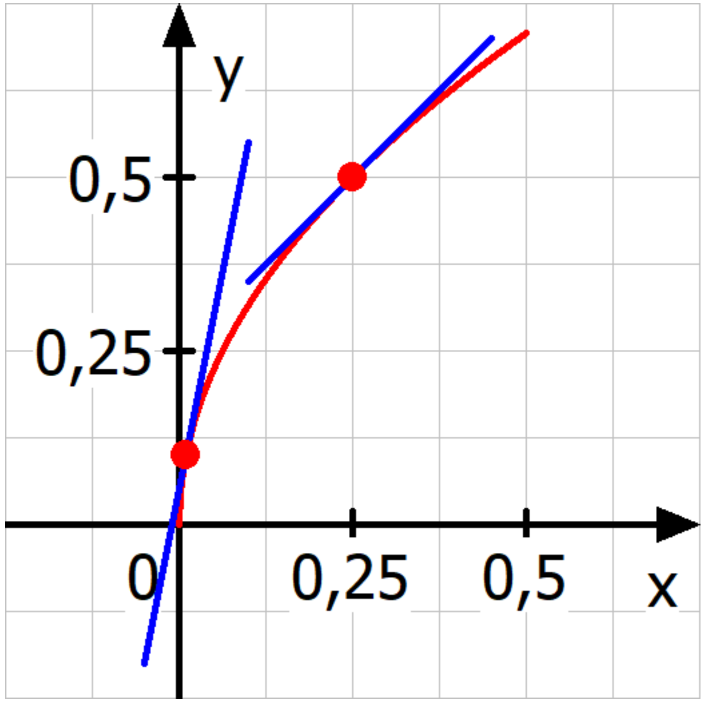
Die y-Werte werden erwartungsgemäss immer kleiner und die Steigung immer grösser, siehe die folgende Zeichnung, wo die beiden Punkte

$$(0.01\,;\,0.1) \quad \text{und} \quad (0.25\,;\,0.5)$$

sowie die zugehörigen Tangenten mit den Steigungen

$$f'(0.01) = 5 \quad \text{bzw.} \quad f'(0.25) = 1$$

eingezeichnet sind.



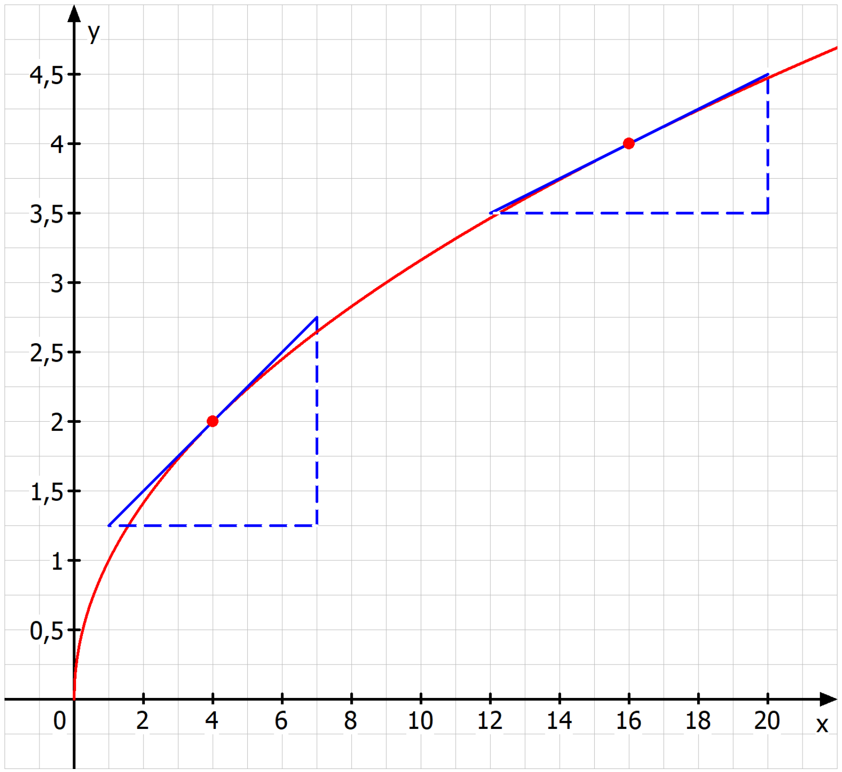
Es gilt

$$x \to 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \to \infty$$

d.h. je näher ein Punkt auf der Kurve dem Ursprung kommt, desto grösser die Steigung der Kurve in diesem Punkt.

3. Der Ausdruck
$$x \to \infty$$
bedeutet, dass der x-Wert immer grösser wird. Die y-Werte werden erwartungsgemäss immer grösser und die Steigung immer kleiner, siehe die folgende Wertetabelle und Zeichnung.

x	4	9	16	10^2	10^4	10^6
$f(x)$	2	3	4	10	10^2	10^3
$f'(x)$	0.25	0.167	0.125	0.05	0.005	0.0005



Es sind die beiden Punkte
$$(4\,;2) \quad \text{und} \quad (16\,;4)$$
sowie die zugehörigen Tangenten mit den Steigungen
$$f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.5}{6} = 0.25$$
bzw.
$$f'(16) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{8} = 0.125$$
eingezeichnet. Es gilt
$$x \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0^+$$
d.h. je weiter weg ein Punkt auf der Kurve vom Ursprung ist, desto kleiner die Steigung der Kurve in diesem Punkt.

4. Der Ausdruck
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
kann nicht Null werden und ist immer positiv, d.h. die Kurve ist streng monoton steigend.

5. Der Graph von f hat in seinem Randpunkt $(0\,;0)$ ein globales Minimum, d.h. es gibt keinen Punkt auf der Kurve, welcher einen kleineren y-Wert hat. Ein Maximum hat der Graph nicht, denn es existiert kein weiterer Randpunkt und wegen
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$
für alle $x \in D = \mathbb{R}_0^+$ ist die Kurve – wie schon erwähnt – streng monoton steigend.