Gegeben ist eine kubische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 - x + 3$$

Gesucht sind die Schnittpunkte mit den Achsen und die Asymptote a. Berechne ausserdem die erste Ableitung und setze diese gleich Null, um die x-Koordinaten des lokalen Maximum und Minimum zu bekommen.

---

1. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = 3$
2. Die Produktform ergibt sich durch gruppenweises Ausklammern und mit Hilfe des dritten Binoms gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,(x-3) - 1(x-3) \\ &= (x^2-1)\,(x-3) \\ &= (x+1)\,(x-1)\,(x-3) \end{aligned}$$

   d.h. es gibt drei Nullstellen bei $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_3 = 3$, alle mit VZW.
3. Für die Asymptote gilt

$$a(x) = x^3$$

4. Für die erste Ableitung f' gilt

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 1 = 3\,(x-1)^2 - 4$$

   d.h. es handelt sich um eine quad. Funktion, siehe blaue Kurve. Die Scheitelpunktform wurde hier nur berechnet, damit man die Kurve besser einzeichnen kann.
5. Die erste Ableitung gleich Null setzen ergibt

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 1 = 0$$

   was zur Diskriminante

$$D = b^2 - 4\,a\,c = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 48 = 4 \cdot 12$$

   und der abc-Formel

$$x_{4,5} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{3} \approx 1 \pm 1.15$$

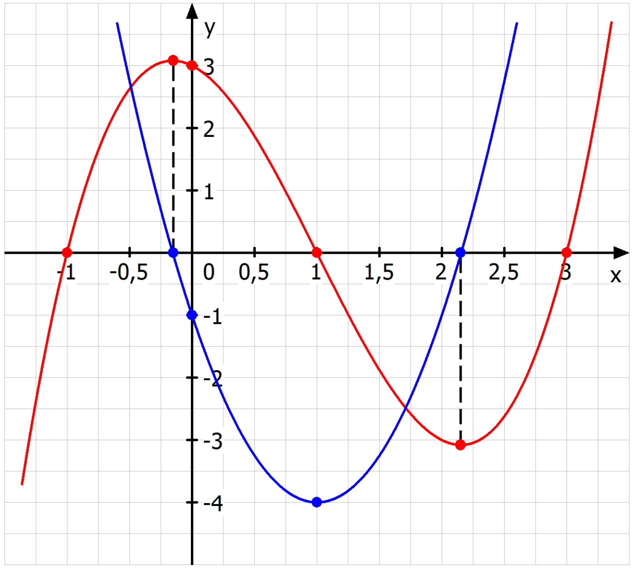
   führt. Setzt man

$$x_4 \approx -0.15 \quad \text{und} \quad x_5 \approx 2.15$$

   in die Funktion f ein, erhält man die zugehörigen y-Werte und damit die beiden gesuchten Extrema

$$Max(-0.15\,;\,3.08) \quad \text{bzw.} \quad Min(2.15\,;\,-3.08)$$

6. Wie man sieht, liegen die x-Werte der Extrema genau dort, wo die erste Ableitung ihre Nullstellen hat.



Eigentlich müsste man noch die zweite Ableitung f'' berechnen, um überprüfen zu können, ob es sich tatsächlich um eine Minimum bzw. Maximum handelt. Mehr dazu später.