Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit

$$f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6$$

Gesucht sind die Schnittpunkte mit den Achsen sowie der Scheitelpunkt.

Im Scheitelpunkt S hat der Graph von f ein Minimum und die Tangente an die Kurve verläuft dort horizontal, siehe erste Zeichnung. Mit Hilfe der ersten Ableitung kann man den Scheitelpunkt auf eine elegantere Weise als mit quadratischer Ergänzung bestimmen. Wie?

---

1. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = -6$ und für die Produktform

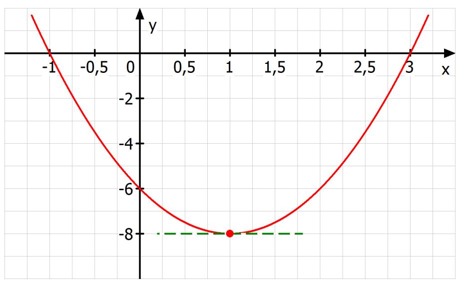
$$f(x) = 2\,(x^2 - 2\,x - 3) = 2\,(x+1)\,(x-3)$$

d.h. es gibt zwei Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Da beide Linearfaktoren den Exponenten 1 haben, sind es Nullstellen mit VZW.

2. Für die Scheitelpunktform gilt mit quadratischer Ergänzung

$$f(x) = 2\,(x^2 - 2\,x) - 6 = 2\,(x^2 - 2\,x + 1) - 2 - 6 = 2\,(x-1)^2 - 8$$

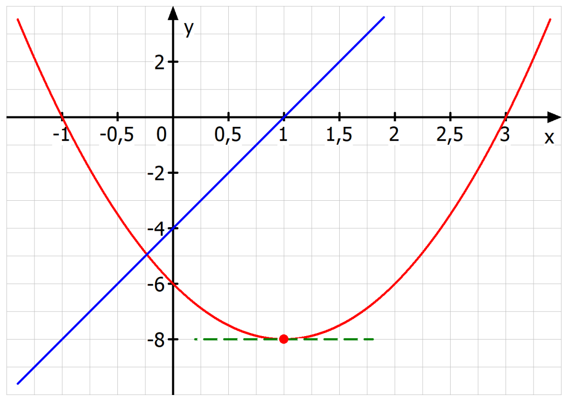
d.h. der Scheitelpunkt liegt bei $S(1\,;\,-8)$, siehe rote Kurve.



3. Mit Potenz-, Faktor- und Summenregel gilt für die erste Ableitung

$$f'(x) = 2 \cdot 2\,x - 4 = 4\,x - 4 = 4\,(x-1)$$

d.h. f' ist eine Gerade, siehe blaue Kurve.



Die blauen y-Werte, also jene der ersten Ableitung f', entsprechen immer gerade den Steigungen der Tangenten an die rote Kurve.

4. Im Minimum muss wegen der horizontalen Tangente zwingend

$$f'(x) = 0$$

gelten, d.h. die blaue Kurve hat dort eine Nullstelle. Deshalb setzt man

$$f'(x) = 4\,(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_s = 1$$

und das ist die x-Koordinate des Scheitelpunktes. Setzt man $x_s = 1$ in die Funktion f ein, erhält man die y-Koordinate des Scheitelpunktes

$$y_s = f(x_s) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$$

Diese Methode kann man auch auf Polynomfunktionen höheren Grades anwenden.