6 Extremwertaufgaben

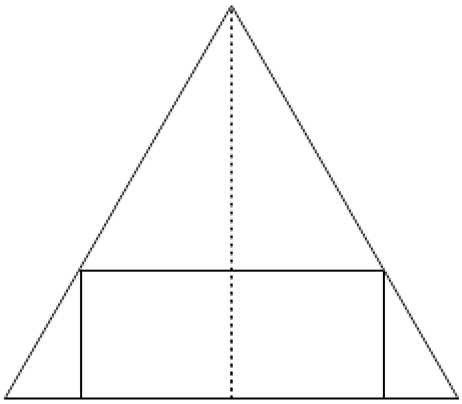
Siehe dazu den Abschnitt 11.3 in der Formelsammlung.

6.1 Aufgaben mit quadratischen Funktionen

Bei den Aufgaben in diesem Abschnitt erhält man nach dem Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung jeweils eine quadratische Funktion. Dadurch könnte der Scheitelpunkt, d.h. das Extremum, auch ohne Ableitungen bestimmt werden, da es immer genau in der Mitte der beiden Nullstellen liegt.

1. Einem Landwirt stehen $16km$ Zaun zur Verfügung. Er will damit eine rechteckige Fläche umzäunen und dabei möglichst viel Weidefläche schaffen. Wie gross muss er die Fläche dimensionieren und welche maximale Fläche ergibt sich dabei?

2. Einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s wird ein Rechteck mit Breite b und Höhe h einbeschrieben. Wie gross müssen b und h in Abhängigkeit von s gewählt werden, damit das Rechteck eine maximale Fläche hat? Wie gross wird die maximale Fläche $A_{max} = A_R$ des Rechtecks verglichen mit der Fläche A_D des Dreiecks?



3. Angrenzend an einen begradigten Fluss soll eine rechteckige Weidefläche eingezäunt werden und für die drei Seiten die gezäunt werden müssen, stehen den Arbeitern $12km$ Zaun zur Verfügung. Wie gross müssen sie die Fläche dimensionieren und welche maximale Fläche ergibt sich dabei?

6.2 Aufgaben mit anderen Funktionen

Bei den Aufgaben in diesem Abschnitt erhält man nach dem Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung Funktionen, welche auch nicht-quadratische Terme enthalten. Um diese Aufgaben lösen zu können, muss man mit Hilfe der 1. Ableitung den kritischen Punkt bestimmen und durch dessen Einsetzen in die 2. Ableitung überprüfen, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

1. Entlang einer bereits bestehenden Mauer soll eine rechteckige Fläche von $1km^2$ eingezäunt werden, wobei möglichst wenig Zaunmaterial verbraucht werden soll. Wie gross muss die Fläche dimensioniert werden und welcher minimale Umfang ergibt sich dabei?

2. Aus Wellblech soll ein Hochregallager mit Flachdach sowie der Breite b und Höhe h gebaut werden. Das Gebäude soll einen quadratischen Grundriss und ein Volumen von $2000m^3$ aufweisen. Da das Lager einseitig an ein bestehendes Gebäude angebaut wird, muss für die Rückwand kein Wellblech verwendet werden. Wie gross muss das Lager dimensioniert werden, um möglichst wenig Wellblech zu verbauen und wieviel davon wird benötigt?

3. Eine zylindrische Konservendose aus Blech soll ein Volumen von einem Liter aufweisen, wobei gilt $1l = 1dm^3$. Wie muss man den Durchmesser d und die Höhe h wählen, damit der Blechverbrauch minimal wird?

4. Aus Wellblech soll eine Lagerhalle mit Flachdach sowie der Breite b, Höhe h und Tiefe t gebaut werden. Die Halle soll doppelt so breit wie hoch werden und ein Volumen von $1000m^3$ aufweisen. Da die Halle an eine senkrechte Felswand angebaut wird, muss für die Rückwand kein Wellblech verwendet werden. Wie gross muss die Halle dimensioniert werden, um möglichst wenig Wellblech zu verbauen und wieviel davon wird benötigt?

5. Eine zylindrische Vase aus sehr dünnem Glass soll ein Volumen von einem Liter aufweisen. Wie muss man den Durchmesser d und die Höhe h wählen, damit der Verbrauch an Glass minimal wird? Die Dicke des Glasses kann vernachlässigt werden.

6.1 Aufgaben mit quadratischen Funktionen (Lösungen)

1. Mit den Rechteckseiten a und b gilt für die Ausgangsgleichung und Nebenbedingung

$$A(a,b) = a\,b \quad \text{bzw.} \quad U = 2\,a + 2\,b = 16km.$$

Die Nebenbedingung nach a umstellen ergibt $a = 8km - b$ und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A(b) = (8km - b)\,b = -b^2 + 8km\,b$$

und damit die Ableitungen

$$A'(b) = -2\,b + 8km \quad \text{sowie} \quad A''(b) = -2.$$

Mit $A'(b) = 0$ erhält man den kritischen Punkt $b = 4km$ und wegen $A''(4km) = -2 < 0$ handelt es sich um ein Maximum.
Einsetzen von $b = 4km$ in die Nebenbedingung ergibt $a = 8km - 4km = 4km$ womit die Weidefläche ein Quadrat ist. Einsetzen von $b = 4km$ in die Ausgangsgleichung ergibt mit $A_{max} = 16km^2$ die maximale Fläche.

2. Mit den Rechteckseiten b und h sowie der Dreiecksseite s gilt für die Ausgangsgleichung und Nebenbedingung

$$A_R(b,h) = b\,h \quad \text{bzw.} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(s-b).$$

Die Nebenbedingung wird mit dem Strahlensatz, d.h. mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, gemäss

$$\frac{s\cdot\sqrt{3}/2}{s/2} = \frac{s\cdot\sqrt{3}/2 - h}{b/2} \quad \Leftrightarrow \quad b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - h \quad \Leftrightarrow \quad h = s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gewonnen. Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt

$$A_R(b) = b\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(s-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\left(-b^2 + s\,b\right)$$

und damit die Ableitungen

$$A'_R(b) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(-2\,b + s)$$

sowie

$$A''_R(b) = -\sqrt{3}.$$

Den kritschen Punkt b findet man durch

$$A'_R(b) = -2\,b + s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = 2\,b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{s}{2}$$

und es gilt $A''_R(\frac{s}{2}) = -\sqrt{3} < 0$, d.h. es handelt sich um ein Maximum.
Einsetzen von $b = \frac{s}{2}$ in die Nebenbedingung ergibt

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\left(s - \frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s,$$

d.h. das Rechteck ist mit $h = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s$ halb so hoch wie das Dreieck mit $\frac{\sqrt{3}}{2}\,s$. Mit $b = \frac{s}{2}$ ist das Rechteck halb so breit wie das Dreieck mit s.
Einsetzen von $b = \frac{s}{2}$ und $h = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s$ in die Ausgangsgleichung $A_R(b,h)$ ergibt mit

$$A_{max} = A_R(s) = \frac{s}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,s = \frac{\sqrt{3}}{8}\,s^2$$

die gesuchte maximale Fläche des Rechtecks. Für die Fläche des Dreiecks gilt

$$A_D(s) = \frac{s\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,s}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2,$$

d.h. A_{max} nimmt 50 % der Dreiecksfläche ein.

3. Mit den Rechteckseiten a und b gilt für die Ausgangsgleichung und Nebenbedingung

$$A(a,b) = a\,b \quad \text{bzw.} \quad U = a + 2\,b = 12km.$$

Die Nebenbedingung nach a umstellen ergibt $a = 12km - 2\,b$ und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A(b) = (12km - 2\,b)\,b = -2\,b^2 + 12km\,b$$

und damit die Ableitungen

$$A'(b) = -4\,b + 12km \quad \text{sowie} \quad A''(b) = -4.$$

Mit $A'(b) = 0$ erhält man den kritischen Punkt $b = 3km$ und wegen $A''(3km) = -4 < 0$ handelt es sich um ein Maximum.
Einsetzen von $b = 3km$ in die Nebenbedingung ergibt $a = 12km - 2 \cdot 3km = 6km$ und in die Ausgangsgleichung die maximale Fläche $A_{max} = 18km^2$.

6.2 Aufgaben mit anderen Funktionen (Lösungen)

1. Mit den Rechteckseiten a und b gilt für die Ausgangsgleichung

$$U(a,b) = b + 2\,a$$

und die Nebenbedingung lautet

$$A = a \cdot b = 1km^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1km^2}{b}.$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt

$$U(b) = b + \frac{2km^2}{b} = b + 2km^2 \cdot b^{-1}$$

und damit die Ableitungen

$$U'(b) = 1 - 2km^2 \cdot b^{-2} = 1 - \frac{2km^2}{b^2}$$

sowie

$$U''(b) = 4km^2 \cdot b^{-3} = \frac{4km^2}{b^3}.$$

Den kritschen Punkt b findet man durch

$$U'(b) = 1 - \frac{2km^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2km^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 2km^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{2km^2} = 1.41km$$

und damit gilt $U''(1.41km) > 0$, d.h. es handelt sich um ein Minimum.
Einsetzen von $b = 1.41km$ in die Nebenbedingung ergibt

$$a = \frac{1km^2}{1.41km} = 0.707km,$$

d.h. die Fläche ist doppelt so breit wie tief.
Einsetzen von $b = 1.41km$ in die vereinfachte Ausgangsgleichung $U(b)$ ergibt mit

$$U_{min} = U(1.41km) = 1.41km + \frac{2km^2}{1.41km} = 2.83km$$

den gesuchten minimalen Umfang.

2. Der Blechverbrauch beträgt b^2 für das Flachdach sowie je $b \cdot h$ für die Front und die beiden Seiten, d.h. insgesamt gilt für die Ausgangsgleichung

$$A(b,h) = b^2 + 3\,b\,h$$

und die Nebenbedingung lautet

$$V = b^2\,h = 2000m^3 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2000m^3}{b^2}.$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} A(b) &= b^2 + 3\,b\,\frac{2000m^3}{b^2} \\ &= b^2 + \frac{6000m^3}{b} \\ &= b^2 + 6000m^3 \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

und damit die Ableitungen

$$A'(b) = 2\,b - 6000m^3 \cdot b^{-2} = 2\,b - \frac{6000m^3}{b^2}$$

sowie

$$A''(b) = 2 + 12000m^3 \cdot b^{-3} = 2 + \frac{12000m^3}{b^3}.$$

Den kritschen Punkt b findet man durch

$$A'(b) = 2\,b - \frac{6000m^3}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,b = \frac{6000m^3}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad b^3 = 3000m^3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt[3]{3000m^3} = 14.4m$$

und damit gilt $A''(14.4m) > 2 > 0$, d.h. es handelt sich um ein Minimum.
Einsetzen von $b = 14.4m$ in die Nebenbedingung ergibt

$$h = \frac{2000m^3}{(10.0m)^2} = 9.61m,$$

d.h. das Hochregallager ist genau 2/3 so hoch wie breit.
Einsetzen von $b = 14.4m$ in die vereinfachte Ausgangsgleichung $A(b)$ ergibt mit

$$A_{min} = A(14.4m) = (14.4m)^2 + \frac{6000m^3}{14.4m} = 624m^2$$

die gesuchte minimale Fläche.

3. Der Blechverbrauch beträgt je $d^2 \cdot \pi/4$ für Boden und Deckel, sowie $d \cdot \pi \cdot h$ für den Mantel, d.h. insgesamt gilt für die Ausgangsgleichung

$$A(d,h) = 2\,\frac{d^2\,\pi}{4} + d\,\pi\,h = \frac{d^2\,\pi}{2} + d\,\pi\,h$$

und die Nebenbedingung lautet

$$V = \frac{d^2\,\pi}{4}\,h = 1l \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{4l}{d^2\,\pi},$$

wobei l für die Einheit Liter steht. Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} A(d) &= \frac{d^2\,\pi}{2} + d\,\pi\,\frac{4l}{d^2\,\pi} \\ &= \frac{d^2\,\pi}{2} + \frac{4l}{d} \\ &= \frac{d^2\,\pi}{2} + 4l \cdot d^{-1} \end{aligned}$$

und damit die Ableitungen

$$A'(d) = \pi\, d - 4l \cdot d^{-2} = \pi\, d - \frac{4l}{d^2}$$

sowie

$$A''(d) = \pi + 8l \cdot d^{-3} = \pi + \frac{8l}{d^3}.$$

Den kritschen Punkt d findet man durch

$$A'(d) = \pi\, d - \frac{4l}{d^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi\, d = \frac{4l}{d^2} \quad \Leftrightarrow \quad d^3 = \frac{4l}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{4l}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4dm^3}{\pi}} = 1.08dm$$

und damit gilt $A''(1.08dm) > \pi > 0$, d.h. es handelt sich um ein Minimum.
Einsetzen von $d = 1.08dm$ in die Nebenbedingung ergibt

$$h = \frac{4l}{(1.08dm)^2\, \pi} = \frac{4dm^3}{(1.08dm)^2\, \pi} = 1.08dm,$$

d.h. die Konservendose ist gleich hoch wie breit.
Einsetzen von $d = 1.08dm$ in die vereinfachte Ausgangsgleichung $A(d)$ ergibt mit

$$A_{min} = A(1.08dm) = \frac{(1.08dm)^2\, \pi}{2} + \frac{4l}{1.08dm} = \frac{(1.08dm)^2\, \pi}{2} + \frac{4dm^3}{1.08dm} = 5.54dm^2$$

die gesuchte minimale Fläche.

4. Der Blechverbrauch beträgt $b \cdot h$ für die Front, $b \cdot t$ für das Flachdach und je $h \cdot t$ für die beiden Seiten, d.h. insgesamt gilt für die Ausgangsgleichung

$$A(b, h, t) = b\, h + b\, t + 2\, h\, t,$$

wobei die zu optimierende Grösse hier von drei Variablen abhängt. Die zwei Nebenbedingungen lauten

$$b = 2\, h$$

sowie

$$V = b \cdot h \cdot t = 1000m^3$$

und aus diesen zwei Bedingungen folgt

$$t = \frac{V}{b \cdot h} = \frac{1000m^3}{2\, h^2} = \frac{500m^3}{h^2}.$$

Werden b und t in der Ausgangsgleichung $A(b, h, t)$ durch obige Ausdrücke ersetzt, resultiert

$$\begin{aligned} A(h) &= 2\, h^2 + 2\, h \cdot \frac{500m^3}{h^2} + 2\, h \cdot \frac{500m^3}{h^2} \\ &= 2\, h^2 + 2000m^3 \cdot \frac{1}{h} \\ &= 2\, h^2 + 2000m^3 \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

und damit die Ableitungen

$$A'(h) = 4\, h - 2000m^3 \cdot h^{-2} = 4\, h - \frac{2000m^3}{h^2}$$

sowie

$$A''(h) = 4 + 4000m^3 \cdot h^{-3} = 4 + \frac{4000m^3}{h^3}.$$

Den kritschen Punkt h findet man durch

$$A'(h) = 4\, h - \frac{2000m^3}{h^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\, h = \frac{2000m^3}{h^2} \quad \Leftrightarrow \quad h^3 = 500m^3 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt[3]{500m^3} = 7.94m$$

und damit gilt $A''(7.94m) > 4 > 0$, d.h. es handelt sich um ein Minimum.
Einsetzen von $h = 7.94m$ in die Nebenbedingungen ergibt

$$b = 2 \cdot 7.94m = 15.9m$$

und

$$t = 500m^3/(7.94m)^2 = 7.94m,$$

d.h. die Lagerhalle ist gleich hoch wie tief.
Einsetzen von $h = 7.94m$ in die vereinfachte Ausgangsgleichung $A(h)$ ergibt mit

$$A_{min} = A(7.94m) = 2\,(7.94m)^2 + \frac{2000m^3}{7.94m} = 378m^2$$

die gesuchte minimale Fläche.

5. Die Fläche beträgt $d^2 \cdot \pi/4$ für den Boden sowie $d \cdot \pi \cdot h$ für den Mantel, d.h. insgesamt gilt für die Ausgangsgleichung

$$A(d,h) = \frac{d^2\,\pi}{4} + d\,\pi\,h$$

und die Nebenbedingung lautet

$$V = \frac{d^2\,\pi}{4}\,h = 1l \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{4l}{d^2\,\pi},$$

wobei l für die Einheit Liter steht. Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} A(d) &= \frac{d^2\,\pi}{4} + d\,\pi\,\frac{4l}{d^2\,\pi} \\ &= \frac{d^2\,\pi}{4} + \frac{4l}{d} \\ &= \frac{d^2\,\pi}{4} + 4l \cdot d^{-1} \end{aligned}$$

und damit die Ableitungen

$$A'(d) = \frac{\pi}{2}\,d - 4l \cdot d^{-2} = \frac{\pi}{2}\,d - \frac{4l}{d^2}$$

sowie

$$A''(d) = \frac{\pi}{2} + 8l \cdot d^{-3} = \frac{\pi}{2} + \frac{8l}{d^3}.$$

Den kritschen Punkt d findet man durch

$$A'(d) = \frac{\pi}{2}\,d - \frac{4l}{d^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}\,d = \frac{4l}{d^2} \quad \Leftrightarrow \quad d^3 = \frac{8l}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{8l}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8dm^3}{\pi}} = 1.37dm$$

und damit gilt $A''(1.37dm) > \frac{\pi}{2} > 0$, d.h. es handelt sich um ein Minimum.
Einsetzen von $d = 1.37dm$ in die Nebenbedingung ergibt

$$h = \frac{4l}{(1.37dm)^2\,\pi} = \frac{4dm^3}{(1.37dm)^2\,\pi} = 0.683dm,$$

d.h. die Vase ist halb so hoch wie breit.
Einsetzen von $d = 1.37dm$ in die vereinfachte Ausgangsgleichung $A(d)$ ergibt mit

$$A_{min} = A(1.37dm) = \frac{(1.37dm)^2\,\pi}{4} + \frac{4l}{1.37dm} = \frac{(1.37dm)^2\,\pi}{4} + \frac{4dm^3}{1.37dm} = 4.39dm^2$$

die gesuchte minimale Fläche.