5 Interpolation mit Polynomfunktionen

Siehe dazu die Abschnitte 9.2.1, 9.2.2 und 10.2 in der Formelsammlung.

5.1 Wissensfragen

1. Berechne $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ der quadratischen Funktion f mit
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$
2. Welche Symmetrie weist der Graph der Funktion f mit $f(x) = a\,x^2 + c$ auf?
3. Welche Symmetrie weist der Graph der Funktion f mit $f(x) = a\,x^3 + b\,x$ auf?
4. Berechne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ und $f^{(4)}(x)$ der Polynomfunktion f mit
$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$
5. Was bedeutet es, wenn ein Polynom von n-ter Ordnung ist?
6. Wie ist ein Polynom aufgebaut, welches symmetrisch zur y-Achse ist?
7. Wie ist ein Polynom aufgebaut, welches symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ist?
8. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$ der Polynomfunktion f mit
$$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots$$
9. Wenn man bei einer Interpolationsaufgabe mit Hilfe von
$$f(x), \quad f'(x) \quad \text{oder} \quad f''(x)$$
ein Gleichung erhalten hat, was sollte man damit tun?

5.2 Gleichungen vereinfachen

Vereinfache die folgenden Gleichungen soweit als möglich.

1. $4\,a\,4^3 + 2\,b\,4 = 0$
2. $a\,4^4 + b\,4^2 - 64 = 0$
3. $a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c\,\frac{1}{2} = 0$
4. $a\,5^4 + b\,5^3 + c\,5^2 + d\,5 - 5 = 0$

5.3 Interpolation mit quadratischen Funktionen

Bemerkungen:

- Wenn die Koordinaten eines Punktes $P(x_p\,;\,y_p)$ bekannt sind, kann man diese in die Funktion f einsetzen um die Gleichung
$$f(x_p) = a \cdot {x_p}^2 + b \cdot x_p + c = y_p$$
zu erhalten.
- Wenn die Steigung m_p der Tangente in einem Punkt $P(x_p\,;\,\ldots)$ bekannt ist, kann x_p in die 1. Ableitung f' eingesetzt werden um die Gleichung
$$f'(x_p) = 2 \cdot a \cdot x_p + b = m_p$$
zu erhalten.
- Jede erhaltene Gleichung ist sogleich zu vereinfachen. So sollte z.B. durch gemeinsame Faktoren dividiert werden falls möglich und konstante Summanden werden auf die rechte Seite der Gleichung gebracht.
- Die Koordinate y_p eines Punktes P ist immer nur für die Funktion f relevant, nicht aber für die 1. Ableitung und wird daher auch nicht eingesetzt in f'.

Aufgaben:

1. Eine Parabel 2. Ordnung verläuft durch den Punkt $P(-1\,;\,5)$ und hat im Punkt $Q(1\,;\,-1)$ eine Tangente mit der Steigung $m_q = -2$.
2. Eine quadratische Funktion berührt im Punkt $P(4\,;\,0)$ die x-Achse und im Punkt $Q(5\,;\,y)$ verläuft die Tangente parallel zur Funktion g mit $g(x) = -4\,x + 1969$.
3. Eine Parabel 2. Ordnung verläuft durch den Punkt $P(-1\,;\,-6)$ und im Punkt $Q(2\,;\,0)$ schneidet ihr Graph die x-Achse mit einer Steigung von $m_q = 5$.
4. Eine Parabel 2. Ordnung verläuft durch den Ursprung und hat in den Punkten $P(-1\,;\,\ldots)$ und $Q(1\,;\,\ldots)$ die Steigungen $m_p = -2$ bzw. $m_q = 10$.
5. Eine quad. Funktion mit Scheitelpunkt im Ursprung hat im Punkt $P(-1\,;\,\ldots)$ die Steigung $m_p = 1$.

5.4 Interpolation mit Polynomfunktionen höheren Grades

Bemerkungen:

- Wenn die Koordinaten eines Punktes $P(x_p\,;\,y_p)$ bekannt sind, kann man diese in die Funktion f einsetzen um die Gleichung

$$f(x_p) = a \cdot {x_p}^n + b \cdot {x_p}^{n-1} + \ldots = y_p$$

  zu erhalten, wobei n der Grad der gesuchten Polynomfunktion ist.

- Wenn die Steigung m_p der Tangente in einem Punkt $P(x_p\,;\,\ldots)$ bekannt ist, kann x_p in die 1. Ableitung f' eingesetzt werden um die Gleichung

$$f'(x_p) = a \cdot n \cdot {x_p}^{n-1} + b \cdot (n-1) \cdot {x_p}^{n-2} + \ldots = m_p$$

  zu erhalten.

- Wenn in einem Punkt $P(x_p\,;\,\ldots)$ ein Extremum liegt, kann x_p in die 1. Ableitung f' eingesetzen werden um die Gleichung

$$f'(x_p) = a \cdot n \cdot {x_p}^{n-1} + b \cdot (n-1) \cdot {x_p}^{n-2} + \ldots = 0$$

  zu erhalten. Die Zahl 0 steht hier für die Steigung m_p der Tangente im Punkt P, denn für diese gilt wegen dem Extremum $m_p = 0$.

- Wenn in einem Punkt $P(x_p\,;\,\ldots)$ ein Wendepunkt liegt, kann x_p in die 2. Ableitung f'' eingesetzt werden um die Gleichung

$$f''(x_p) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot {x_p}^{n-2} + b \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot {x_p}^{n-3} + \ldots = 0$$

  zu erhalten. Die Zahl 0 steht hier für die Krümmung k_p im Punkt P, denn für diese gilt wegen dem Wendepunkt $k_p = 0$.

- Jede erhaltene Gleichung ist sogleich zu vereinfachen. So sollte z.B. durch gemeinsame Faktoren dividiert werden falls möglich und konstante Summanden werden auf die rechte Seite der Gleichung gebracht.

- Die Koordinate y_p eines Punktes P ist immer nur für die Funktion f relevant, nicht aber für die 1. und 2. Ableitung und wird daher auch nicht eingesetzt in f' oder f''.

- Bei Polynomfunktionen und ihren Ableitungen treten am Schluss der Zuordnungsvorschriften häufig konstante Summanden auf, wie das folgende Beispiel einer Parabel 3. Ordnung zeigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \\ f'(x) &= 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c \\ f''(x) &= 6\,a\,x + 2\,b \end{aligned}$$

  Sollte in einer Aufgabenstellung der Schnittpunkt mit der y-Achse gegeben sein, also z.B. $P(0\,;\,4)$, dann kennt man wegen $f(0) = d = 4$ den Wert für d und kann diesen in $f(x)$ einsetzen. Wenn P sogar ein Wendepunkt ist, gilt wegen $f''(0) = 2\,b = 0$ auch $b = 0$ und alle drei obigen Formeln vereinfachen sich. Deswegen sollte man, falls der Schnittpunkt mit der y-Achse gegeben ist, diesen immer zuerst einsetzen.

Aufgaben:

1. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch den Punkt $P(2\,;\ 4/3)$ und hat in $Q(\sqrt{3}\,;\ 5)$ einen Wendepunkt.
2. Eine Parabel 3. Ordnung berührt im Ursprung die x-Achse. Die Tangente im Punkt $P(-3\,;\ 0)$ verläuft parallel zur Funktion g mit $g(x) = 6\,x + 247$.
3. Eine Parabel 3. Ordnung hat in $P(1\,;\ 4)$ ein Extremum und in $Q(0\,;\ 2)$ einen Wendepunkt.
4. Eine Parabel 3. Ordnung verläuft durch die Punkte $P(0\,;\ -5)$ sowie $Q(1\,;\ 0)$ und hat in $R(5\,;\ 0)$ ein Extremum.
5. Eine Parabel 3. Ordnung verläuft durch den Ursprung und hat in $P(1\,;\ -2)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente, d.h. die Tangente im Wendepunkt P, schneidet die x-Achse im Punkt $Q(2\,;\ 0)$.
6. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat im Punkt $P(2\,;\ 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m_p = -4/3$.
7. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch den Punkt $P(0\,;\ -4)$ und hat in $Q(-4\,;\ 0)$ ein Extremum.
8. Eine Parabel 4. Ordnung hat im Ursprung einen Wendepunkt und im Punkt $P(6\,;\ y)$ ein Extremum. Im Punkt $Q(8\,;\ 0)$ schneidet ihr Graph die x-Achse mit einer Steigung von $m_q = -8$.
9. Eine Parabel 3. Ordnung hat dieselben Nullstellen wie p mit $p(x) = -0.5\,x^3 + 2\,x$ und im Ursprung stehen die beiden Parabeln bzw. deren Tangenten senkrecht aufeinander.
10. Eine Parabel 4. Ordnung hat im Ursprung und im Wendepunkt $P(-2\,;\,2)$ Tangenten parallel zur x-Achse.
11. Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 5. Ordnung hat im Ursprung die Tangente t mit der Zuordnungsvorschrift $t(x) = 7\,x$ und in $P(1\,;\ 0)$ einen Wendepunkt.
12. Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 5. Ordnung hat in $P(-1\,;\ 1)$ einen Wendepunkt und eine Wendetangente mit der Steigung $m_p = 3$.
13. Eine Parabel 3. Ordnung verläuft durch den Punkt $P(1\,;\ -2)$ und hat im Ursprung einen Sattelpunkt, auch Terrassenpunkt genannt.

5.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Obwohl die zu bestimmenden Parameter a, b und c nicht bekannt sind, kann man f mit Summenregel, Faktorregel und Potenzregel ableiten gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x^2 + b\,x + c \\ f'(x) &= 2\,a\,x + b \\ f''(x) &= 2\,a \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

   denn es handelt sich bei a, b und c um konstante Faktoren bzw. Summanden.

2. Weil x nur in der Potenz x^2 vorkommt, ist der Graph symmetrisch zur y-Achse.

3. Weil x nur in Potenzen mit ungeraden Exponenten vorkommt, ist der Graph symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

4. Obwohl die zu bestimmenden Parameter a, b, c und d nicht bekannt sind, kann man f mit Summenregel, Faktorregel und Potenzregel ableiten gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \\ f'(x) &= 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c \\ f''(x) &= 6\,a\,x + 2\,b \\ f'''(x) &= 6\,a \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

   denn es handelt sich bei a, b, c und d um konstante Faktoren bzw. Summanden.

5. Die n-te Ordnung steht für den höchsten Exponenten, also

$$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + c \cdot x^{n-2} + \ldots$$

   mit absteigenden Exponenten bis hin zum Konstantglied.

6. Eine solche Polynomfunktion kann nur gerade Potenzen von x enthalten, also z.B.

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$$

   was ein Konstantglied am Schluss wegen $x^0 = 1$ mit einschliesst.

7. Eine solche Polynomfunktion kann nur ungerade Potenzen von x enthalten, also z.B.

$$f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$$

   was ein Konstantglied am Schluss ausschliesst.

8. Mit Summen-, Faktor- und Potenzregel gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots \\ f'(x) &= a \cdot n \cdot x^{n-1} + b \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots \\ f''(x) &= a \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + b \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} + \ldots \end{aligned}$$

9. Die Gleichung wird vereinfacht, indem man durch gemeinsame Faktoren dividiert und konstante Summanden auf die rechte Seite bringt. Dieses Vorgehen erleichtert das Lösen von Gleichungssystemen erheblich.

5.2 Gleichungen vereinfachen (Lösungen)

Bemerkung:

Gleichungen werden vereinfacht, indem man durch gemeinsame Faktoren dividiert und konstante Summanden auf die rechte Seite bringt. Dieses Vorgehen erleichtert das Lösen von Gleichungssystemen erheblich.

Lösungen:

1. Durch gemeinsame Faktoren 4 und 2 dividieren.

$$4\,a\,4^3 + 2\,b\,4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,a\,4^2 + 2\,b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,a\,4^2 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 32\,a + b = 0$$

2. Durch gemeinsamen Faktor 16 dividieren und Konstantglied 4 auf die rechte Seite bringen.

$$a\,4^4 + b\,4^2 - 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,4^2 + b - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16\,a + b = 4$$

3. Wegen $(1/2)^3 = 1/8$ mit Faktor 8 multiplizieren.

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c\,\frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + 2\,b + 4\,c = 0$$

4. Durch gemeinsamen Faktor 5 dividieren und Konstantglied 1 auf die rechte Seite bringen.

$$a\,5^4 + b\,5^3 + c\,5^2 + d\,5 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,5^3 + b\,5^2 + c\,5 + d - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 125\,a + 25\,b + 5\,c + d = 1$$

5.3 Interpolation mit quadratischen Funktionen (Lösungen)

Bemerkung:

Für eine quadratische Funktion gilt

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\,a\,x + b$$

bzw. für die Sonderformen

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\,a\,x + b$$

und

$$f(x) = a\,x^2 + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\,a\,x$$

Lösungen:

1. Eine Parabel 2. Ordnung bedeutet $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(-1\,;\,5)$	$f(-1) = \ldots = 5$	$a - b + c = 5$
Punkt $Q(1\,;\,-1)$	$f(1) = \ldots = -1$	$a + b + c = -1$
Steigung $m_q = -2$ im Punkt Q	$f'(1) = \ldots = -2$	$2\,a + b = -2$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 3\,x + \frac{3}{2}.$$

2. Eine quadratische Funktion bedeutet $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(4\,;\,0)$	$f(4) = \ldots = 0$	$16\,a + 4\,b + c = 0$
Steigung $m_p = 0$ im Punkt P	$f'(4) = \ldots = 0$	$8\,a + b = 0$
Steigung $m_q = -4$ im Punkt Q	$f'(5) = \ldots = -4$	$10\,a + b = -4$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -2\,x^2 + 16\,x - 32.$$

3. Eine Parabel 2. Ordnung bedeutet $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(-1\,;\,-6)$	$f(-1) = \ldots = -6$	$a - b + c = -6$
Punkt $Q(2\,;\,0)$	$f(2) = \ldots = 0$	$4\,a + 2\,b + c = 0$
Steigung $m_q = 5$ im Punkt Q	$f'(2) = \ldots = 5$	$4\,a + b = 5$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = x^2 + x - 6.$$

4. Eine Parabel 2. Ordnung durch den Ursprung bedeutet $c = 0$, d.h. $f(x) = a\,x^2 + b\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Steigung $m_p = -2$ im Punkt P	$f'(-1) = \ldots = -2$	$-2\,a + b = -2$
Steigung $m_q = 10$ im Punkt Q	$f'(1) = \ldots = 10$	$2\,a + b = 10$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = 3\,x^2 + 4\,x.$$

5. Eine quad. Funktion mit Scheitelpunkt im Ursprung bedeutet $b = c = 0$ in der allg. Form, d.h.

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \Rightarrow \quad f(x) = a\,x^2$$

oder $x_s = y_s = 0$ in der Scheitelpunktform, d.h.

$$f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s \quad \Rightarrow \quad f(x) = a\,x^2$$

und damit $f'(x) = 2\,a\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Steigung $m_p = 1$ im Punkt P	$f'(-1) = \ldots = 1$	$-2\,a = 1$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2.$$

5.4 Interpolation mit Polynomfunktionen höheren Grades (Lösungen)

1. Die Symmetrie zur y-Achse und die 4. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^4 + b\,x^2 + c$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(2\,;\,4/3)$	$f(2) = \ldots = 4/3$	$16\,a + 4\,b + c = 4/3$
Punkt $Q(\sqrt{3}\,;\,5)$	$f(\sqrt{3}) = \ldots = 5$	$9\,a + 3\,b + c = 5$
Wendepunkt Q	$f''(\sqrt{3}) = \ldots = 0$	$18\,a + b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^4 - 6\,x^2 + 20.$$

2. Die Kurve durch den Ursprung und die 3. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Steigung $m_o = 0$ im Ursprung	$f'(0) = \ldots = 0$	$c = 0$
Punkt $P(-3\,;\,0)$	$f(-3) = \ldots = 0$	$9\,a - 3\,b = 0$
Steigung $m_p = 6$ im Punkt P	$f'(-3) = \ldots = 6$	$9\,a - 2\,b = 2$

Man beachte, dass der y-Achsenabschnitt 247 der Gerade g für die Lösung der Aufgabe nicht relevant ist. Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{2}{3}\,x^3 + 2\,x^2.$$

3. Die 3. Ordnung liefert $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $Q(0\,;\,2)$	$f(0) = \ldots = 2$	$d = 2$
Wendepunkt Q	$f''(0) = \ldots = 0$	$b = 0$
Punkt $P(1\,;\,4)$	$f(1) = \ldots = 4$	$a + c = 2$
Extremum im Punkt P	$f'(1) = \ldots = 0$	$3\,a + c = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -x^3 + 3\,x + 2.$$

4. Die 3. Ordnung liefert $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(0\,;\,-5)$	$f(0) = \ldots = -5$	$d = -5$
Punkt $Q(1\,;\,0)$	$f(1) = \ldots = 0$	$a + b + c = 5$
Punkt $R(5\,;\,0)$	$f(5) = \ldots = 0$	$25\,a + 5\,b + c = 1$
Extremum im Punkt R	$f'(5) = \ldots = 0$	$75\,a + 10\,b + c = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{1}{5}\,x^3 - \frac{11}{5}\,x^2 + 7\,x - 5.$$

5. Die 3. Ordnung liefert $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ und die Steigung der Wendetangente ist

$$m_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} = \frac{-2-0}{1-2} = 2,$$

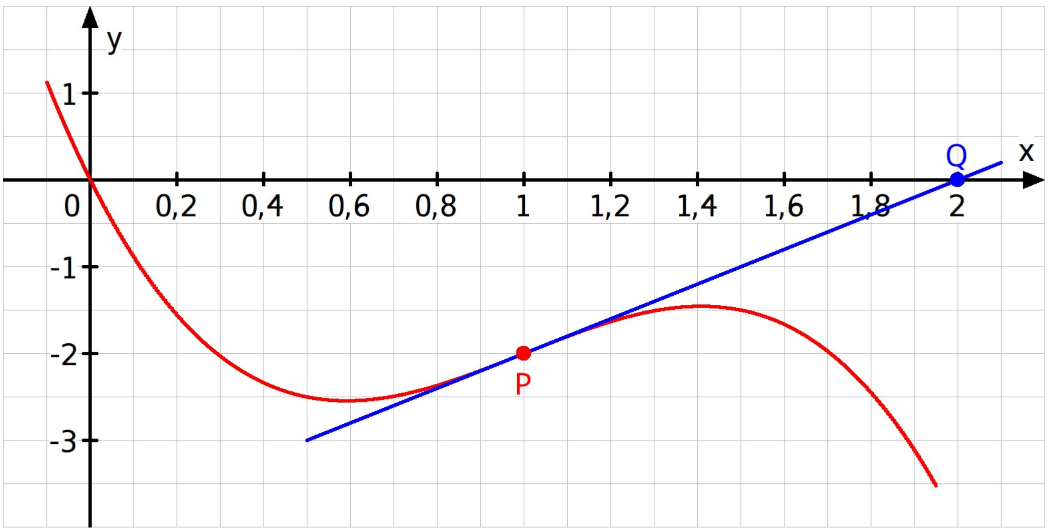
wobei zu beachten ist, dass der Graph von f **nicht** durch den Punkt Q verläuft.

Eigenschaft	Ansatz	Gleichung
Punkt $P(1\,;\,-2)$	$f(1) = \ldots = -2$	$a + b + c = -2$
Steigung $m_p = 2$ im Punkt P	$f'(1) = \ldots = 2$	$3\,a + 2\,b + c = 2$
Wendepunkt P	$f''(1) = \ldots = 0$	$3\,a + b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -4\,x^3 + 12\,x^2 - 10\,x,$$

siehe die Zeichnung.



Funktion f, Tangente t durch Punkt Q

6. Die Symmetrie zur y-Achse und die 4. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^4 + b\,x^2 + c$.

Eigenschaft	Ansatz	Gleichung
Punkt $P(2\,;\,0)$	$f(2) = \ldots = 0$	$16\,a + 4\,b + c = 0$
Steigung $m_p = -4/3$ im Punkt P	$f'(2) = \ldots = -4/3$	$8\,a + b = -1/3$
Wendepunkt P	$f''(2) = \ldots = 0$	$24\,a + b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{1}{48}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{3}.$$

7. Die Symmetrie zur y-Achse und die 4. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^4 + b\,x^2 + c$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(0\,;\,-4)$	$f(0) = \ldots = -4$	$c = -4$
Punkt $Q(-4\,;\,0)$	$f(-4) = \ldots = 0$	$64\,a + 4\,b = 1$
Extremum im Punkt Q	$f'(-4) = \ldots = 0$	$32\,a + b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -\frac{1}{64}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^2 - 4.$$

8. Die Kurve durch den Ursprung und die 4. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Wendepunkt im Ursprung	$f''(0) = \ldots = 0$	$c = 0$
Punkt $Q(8\,;\,0)$	$f(8) = \ldots = 0$	$512\,a + 64\,b + d = 0$
Steigung $m_q = -8$ im Punkt Q	$f'(8) = \ldots = -8$	$2048\,a + 192\,b + d = -8$
Extremum im Punkt $P(6\,;\,y)$	$f'(6) = \ldots = 0$	$864\,a + 108\,b + d = 0$

Der y-Wert des Punktes P spielt keine Rolle, da P nur in seiner Eigenschaft als Extremum verwendet wird. Der Befehl

```
Solve[512a + 64b + d = 0 && 2048a + 192b + d = - 8 && 864a + 108b + d = 0, {a, b, d}]
```

auf www.wolframalpha.com liefert die Koeffizienten a, b sowie d und damit die gesuchte Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = -\frac{1}{64}\,x^4 + \frac{1}{8}\,x^3.$$

9. Weil bei dieser Aufgabe die Nullstellen von p bzw. f eine Rolle spielen, kann man einen anderen Lösungsansatz wählen. Die Zuordnungsvorschrift der Parabel p kann faktorisiert werden gemäss

$$p(x) = -0.5\,x\,(x^2 - 4) = -0.5\,x\,(x+2)\,(x-2),$$

d.h. die drei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$ sind bekannt und für f muss somit

$$f(x) = a\,x\,(x+2)\,(x-2)$$

gelten. Die Ableitungen von f und p berechnen sich zu

$$f'(x) = 3\,a\,x^2 - 4\,a \quad \text{bzw.} \quad p'(x) = -1.5\,x^2 + 2$$

und weil die beiden Graphen im Ursprung senkrecht aufeinander stehen, gilt dort

$$m_f = -\frac{1}{m_p} \quad \Leftrightarrow \quad f'(0) = -\frac{1}{p'(0)}.$$

Obige Formel und Einsetzen von $x = 0$ in die Ableitungen f' und p' ergibt

$$(3\,a \cdot 0^2 - 4\,a) = -\frac{1}{(-1.5 \cdot 0^2 + 2)} \quad \Leftrightarrow \quad -4\,a = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{8}$$

und damit die gesuchte Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{8}\,x\,(x+2)\,(x-2) = \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x.$$

10. Die Kurve durch den Ursprung und die 4. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Steigung $m_o = 0$ im Ursprung	$f'(0) = \ldots = 0$	$d = 0$
Punkt $P(-2\,;\,2)$	$f(-2) = \ldots = 2$	$8\,a - 4\,b + 2\,c = 1$
Steigung $m_p = 0$ im Punkt P	$f'(-2) = \ldots = 0$	$8\,a - 3\,b + c = 0$
Wendepunkt P	$f''(-2) = \ldots = 0$	$24\,a - 6\,b + c = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = \frac{3}{8}\,x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2.$$

11. Die Punktsymmetrie zum Ursprung und die 5. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^5 + b\,x^3 + c\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Steigung $m_o = 7$ im Ursprung	$f'(0) = \ldots = 7$	$c = 7$
Punkt $P(1\,;\,0)$	$f(1) = \ldots = 0$	$a + b = -7$
Wendepunkt P	$f''(1) = \ldots = 0$	$10\,a + 3\,b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = 3\,x^5 - 10\,x^3 + 7\,x.$$

12. Die Punktsymmetrie zum Ursprung und die 5. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^5 + b\,x^3 + c\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Punkt $P(-1\,;\,1)$	$f(-1) = \ldots = 1$	$a + b + c = -1$
Steigung $m_p = 3$ im Punkt P	$f'(-1) = \ldots = 3$	$5\,a + 3\,b + c = 3$
Wendepunkt P	$f''(-1) = \ldots = 0$	$10\,a + 3\,b = 0$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -\frac{3}{2}\,x^5 + 5\,x^3 - \frac{9}{2}\,x.$$

13. Die Kurve durch den Ursprung und die 3. Ordnung liefern $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$.

Eigenschaft	**Ansatz**	**Gleichung**
Wendepunkt im Ursprung	$f''(0) = \ldots = 0$	$b = 0$
Steigung $m_o = 0$ im Ursprung	$f'(0) = \ldots = 0$	$c = 0$
Punkt $P(1\,;\,-2)$	$f(1) = \ldots = -2$	$a = -2$

Die gesuchte Zuordnungsvorschrift ist

$$f(x) = -2\,x^3.$$