Gegeben sind trigonometrische Gleichungen, vergleiche FS 4.13.6

a)	$\sin(2.5\,\alpha) = 1.5$	b)	$\cos(-\sqrt{2}\,\alpha) = -1.5$
c)	$\sin(-3.5\,\alpha) = \sqrt{3}$	d)	$\cos(0.5\,\alpha) = -\sqrt{2}$
e)	$\sin(2\,\alpha) = 0.5$	f)	$\cos(2\,\alpha) = 0.5$
g)	$\sin(0.5\,\alpha) = -\sqrt{3}/2$	h)	$\cos(0.5\,\alpha) = -\sqrt{3}/2$
i)	$\sin(-3\,\alpha) = 1/\sqrt{2}$	j)	$\cos(-3\,\alpha) = 1/\sqrt{2}$
k)	$\sin(0.25\,\alpha) = -1$	l)	$\cos(0.25\,\alpha) = -1$

Löse folgende Aufgaben.

1. Gegeben sei die Sinusfunktion f mit

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{5\,\pi}{2}\right]$$

sowie die Cosinusfunktion g mit

$$g(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{5\,\pi}{2}\right]$$

Zeichne die Graphen $G(f)$ und $G(g)$ in dasselbe Koordinatensystem. Wie lauten der Definitionsbereich D und der Wertebereich W für diese Funktionen und was lässt sich über deren Periodizität sagen?

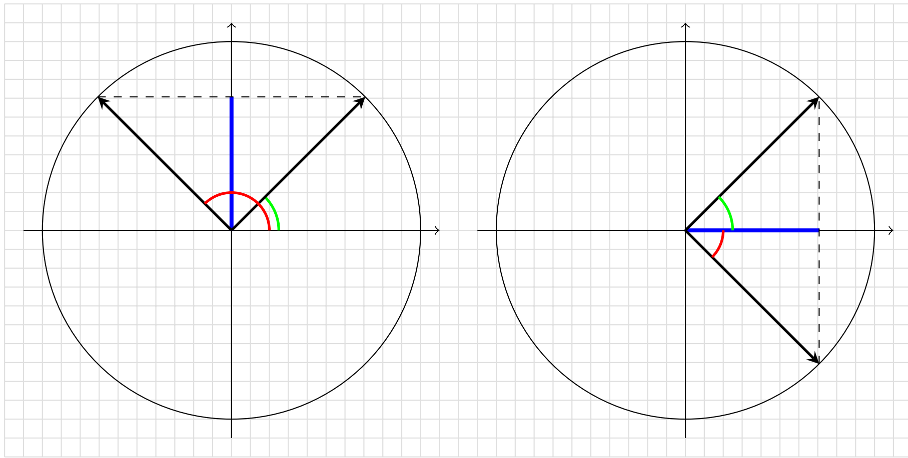
2. Für welche $R \in \mathbb{R}$ sind die Gleichungen

$$\sin[T(\alpha)] = R \quad \text{und} \quad \cos[T(\alpha)] = R$$

nicht lösbar und was bedeutet der Ausdruck $T(\alpha)$?

3. Schau dir die Gleichungen a) bis d) an und löse sie, falls möglich.

4. Welche Symmetrieformeln gelten für Sinus- und Cosinuswerte im Einheitskreis?



5. Wie lautet die äquivalente Umformung für die Gleichung

$$\sin[T(\alpha)] = R$$

und unter welcher Bedingung ist eine solche möglich?

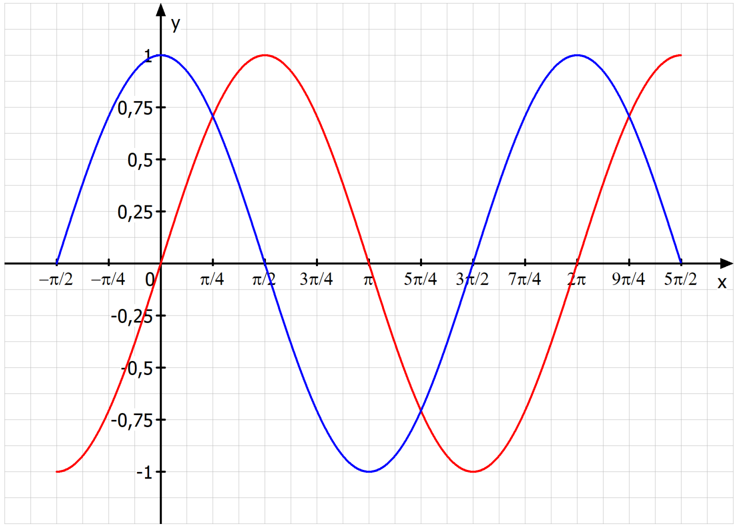
6. Wie lautet die äquivalente Umformung für die Gleichung

$$\cos[T(\alpha)] = R$$

und unter welcher Bedingung ist eine solche möglich?

7. Lösen die Gleichungen e) bis l).

1. Siehe die Graphen $G(f)$ und $G(g)$ der Sinus- bzw. Cosinusfunktion, vergleiche FS 8.11.



Für beide Funktionen gilt

$$x \in D = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad f(x), g(x) \in W = [-1\,;\,1]$$

d.h. als „Input" ist jede reelle Zahl (immer ein Winkel in Radiant oder Grad) erlaubt und als „Output" kommen nur die Funktionswerte

$$-1 \leq f(x), g(x) \leq 1$$

in Frage. Mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

und

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

d.h. beide Funktionen haben eine Periodelänge von $2\pi \approx 6.28$, vergleiche FS 6.3.3.

2. a) Die Gleichungen

$$\sin[T(\alpha)] = R \quad \text{und} \quad \cos[T(\alpha)] = R$$

sind für

$$|R| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad R < -1 \quad \vee \quad 1 < R \quad \Leftrightarrow \quad R \notin [-1\,;\,1]$$

nicht lösbar, denn der Sinuswert R bzw. der Cosinuswert R muss im Intervall $W = [-1\,;\,1]$ liegen, vergleiche Aufgabe 1 und Einheitskreis.

b) Der Ausdruck $T(\alpha)$ steht für einen „Term in α" (d.h. für einen Term welcher die Variable α enthält) und im einfachsten Fall gilt

$$T(\alpha) = \alpha \quad \text{d.h.} \quad \sin(\alpha) = R$$

Wenn man eine in x-Richtung gestreckte Sinusfunktion mit „halber Frequenz" will, schreibt man

$$T(\alpha) = 0.5\,\alpha \quad \text{d.h.} \quad \sin(0.5\,\alpha) = R$$

und wenn man eine in x-Richtung gestauchte Cosinusfunktion mit „doppelter Frequenz" will, schreibt man

$$T(\alpha) = 2\,\alpha \quad \text{d.h.} \quad \cos(2\,\alpha) = R$$

3. Gemäss Aufgabe 1 und 2 muss

$$R, R \in W = [-1\,;\,1]$$

gelten, d.h. die Gleichungen a) bis d) sind wegen

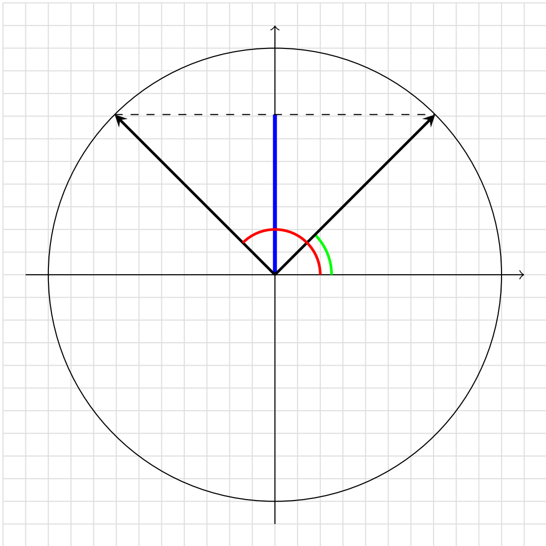
$$\sin[T(\alpha)] = 1.5 \notin W \quad \text{und} \quad \sin[T(\alpha)] = \sqrt{3} \approx 1.7 \notin W$$

sowie

$$\cos[T(\alpha)] = -1.5 \notin W \quad \text{und} \quad \cos[T(\alpha)] = -\sqrt{2} \approx -1.4 \notin W$$

nicht lösbar, wobei das Argument $T(\alpha)$ keinen Einfluss hat.

4. a) Da der (blaue) Sinuswert senkrecht eingetragen wird, entsteht eine Symmetrie bez. y-Achse.



Die Winkel α_1 und α_2 ergänzen sich zu π, d.h. es sind sogenannte Supplementwinkel und es gilt

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1$$

Die beiden Winkel sind offensichtlich nicht gleich, d.h. die Behauptung $\alpha_2 = \alpha_1$ ist falsch, aber sie haben denselben Sinuswert womit

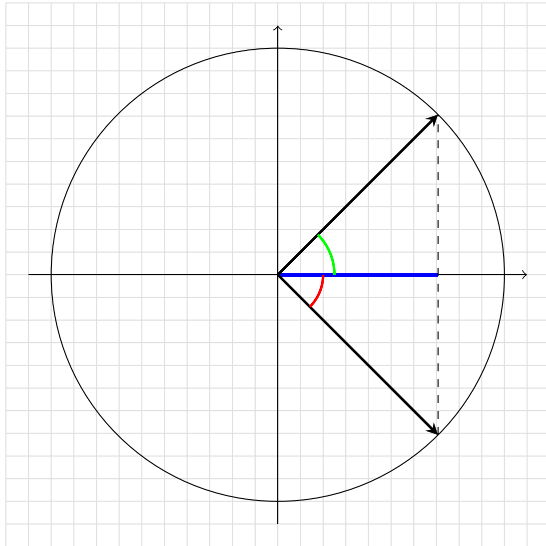
$$\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2) = \sin(\pi - \alpha_1) = R$$

gilt, bzw. ohne Indizes

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$$

vergleiche FS 6.3.4.

b) Da der (blaue) Cosinuswert waagrecht eingetragen wird, entsteht eine Symmetrie bez. x-Achse.



Die Winkel α_1 und α_2 sind bis auf das Vorzeichen gleich, d.h. es sind sogenannte Gegenwinkel und es gilt

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

Die beiden Winkel sind offensichtlich nicht gleich, d.h. die Behauptung $\alpha_2 = \alpha_1$ ist falsch, aber sie haben denselben Cosinuswert womit

$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) = \cos(-\alpha_1) = R$$

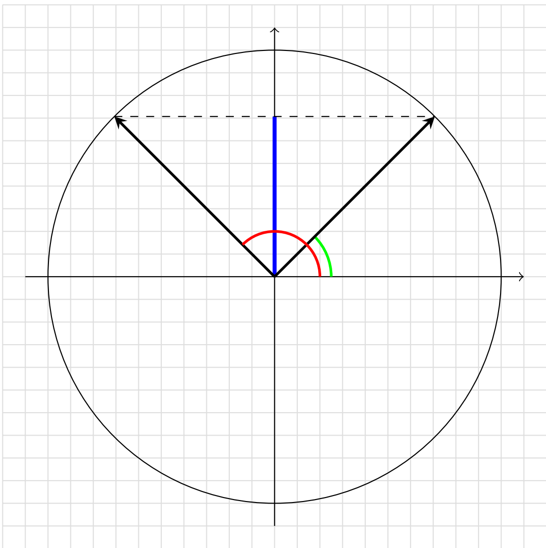
gilt, bzw. ohne Indizes

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

vergleiche FS 6.3.4.

5. Für
$$|R| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq R \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad R \in [-1\,;\,1]$$
gilt die Umformung
$$\sin[T(\alpha)] = R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(\alpha_1) = \arcsin(R) + n \cdot 2\pi \\ T(\alpha_2) = \pi - \arcsin(R) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
mit $n \in \mathbb{Z}$, vergleiche FS 4.13.6 und Einheitskreis.

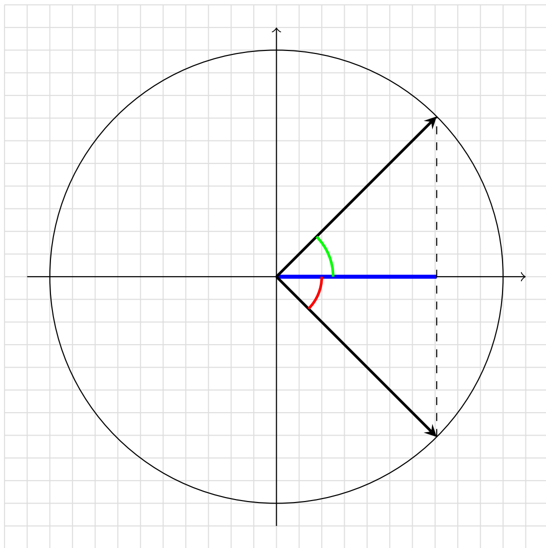
Nach dieser ersten Umformung müssen die beiden Gleichungen mit den Termen $T(\alpha_1)$ und $T(\alpha_2)$ nach α_1 bzw. α_2 umgeformt werden.



Es gibt die zwei „Basislösungen"
$$\arcsin(R) \quad \text{und} \quad \pi - \arcsin(R)$$
wobei ein Taschenrechner immer nur den ersten Winkel
$$\arcsin(R) \in [-90°\,;\,90°] \qquad \text{bzw.} \qquad \arcsin(R) \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$$
aus dem rechten Halbkreis zurückgeben kann.

6. Für
$$|R| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq R \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad R \in [-1\,;\,1]$$
gilt die Umformung
$$\cos[T(\alpha)] = R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(\alpha_1) = \arccos(R) + n \cdot 2\pi \\ T(\alpha_2) = -\arccos(R) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
mit $n \in \mathbb{Z}$, vergleiche FS 4.13.6 und Einheitskreis.

Nach dieser ersten Umformung müssen die beiden Gleichungen mit den Termen $T(\alpha_1)$ und $T(\alpha_2)$ nach α_1 bzw. α_2 umgeformt werden.



Es gibt die zwei „Basislösungen"
$$\arccos(R) \quad \text{und} \quad -\arccos(R)$$
wobei ein Taschenrechner immer nur den ersten Winkel
$$\arccos(R) \in [0°\,;\,180°] \qquad \text{bzw.} \qquad \arccos(R) \in [0\,;\,\pi]$$
aus dem oberen Halbkreis zurückgeben kann.

7. e) Mit

$$\sin(2\,\alpha) = 0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$2\,\alpha_1 = \sin^{-1}(0.5) + n\cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$2\,\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(0.5) + n\cdot 2\pi$$

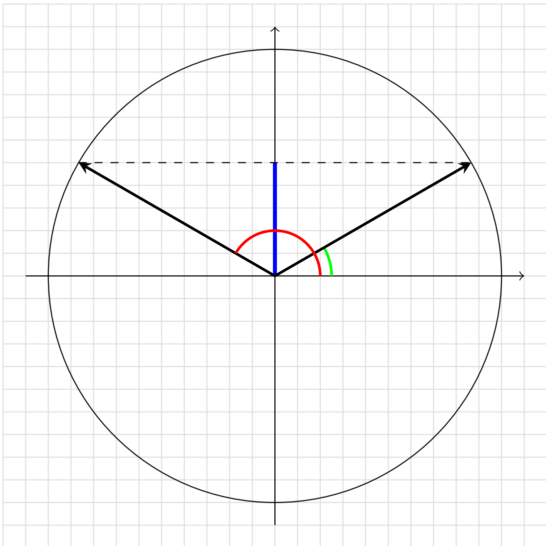
und damit

$$2\,\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \wedge \quad 2\,\alpha_2 = \frac{5\,\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$

wobei der Faktor 2 aus

$$T(\alpha) = 2\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ ergibt

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{12} + n\cdot\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{5\,\pi}{12} + n\cdot\pi$$

f) Mit

$$\cos(2\,\alpha) = 0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$2\,\alpha_1 = \cos^{-1}(0.5) + n\cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$2\,\alpha_2 = -\cos^{-1}(0.5) + n\cdot 2\pi$$

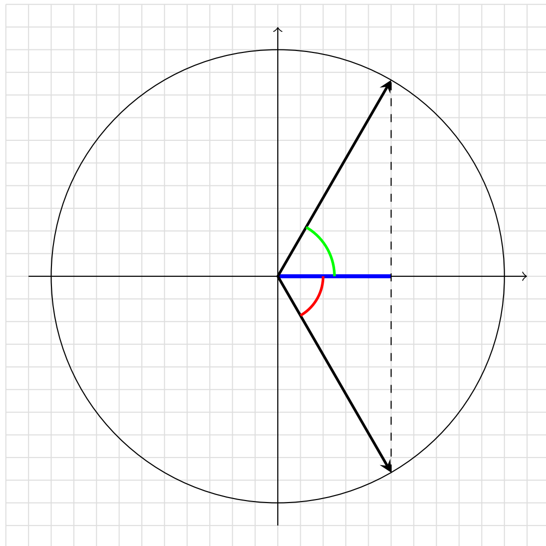
und damit

$$2\,\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \quad \wedge \quad 2\,\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$$

wobei der Faktor 2 aus

$$T(\alpha) = 2\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ und zusammenfassen ergibt

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$$

g) Mit

$$\sin(0.5\,\alpha) = -\sqrt{3}/2 \approx -0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$0.5\,\alpha_1 = \sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$0.5\,\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi$$

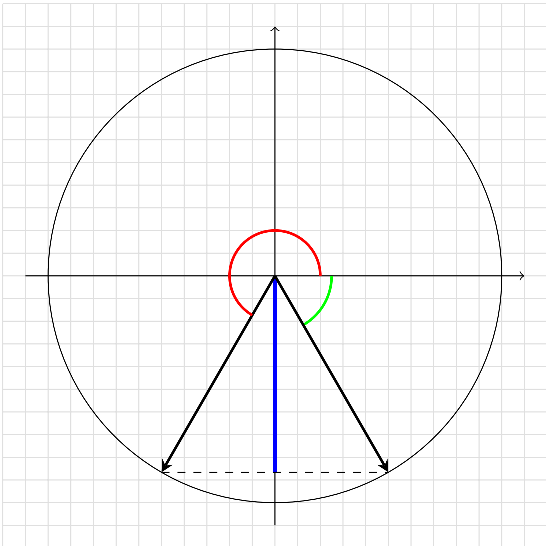
und damit

$$0.5\,\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad 0.5\,\alpha_2 = \frac{4\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

wobei der Faktor 0.5 aus

$$T(\alpha) = 0.5\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ ergibt

$$\alpha_1 = -\frac{2\,\pi}{3} + n \cdot 4\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{8\,\pi}{3} + n \cdot 4\pi$$

h) Mit

$$\cos(0.5\,\alpha) = -\sqrt{3}/2 \approx -0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$0.5\,\alpha_1 = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$0.5\,\alpha_2 = -\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi$$

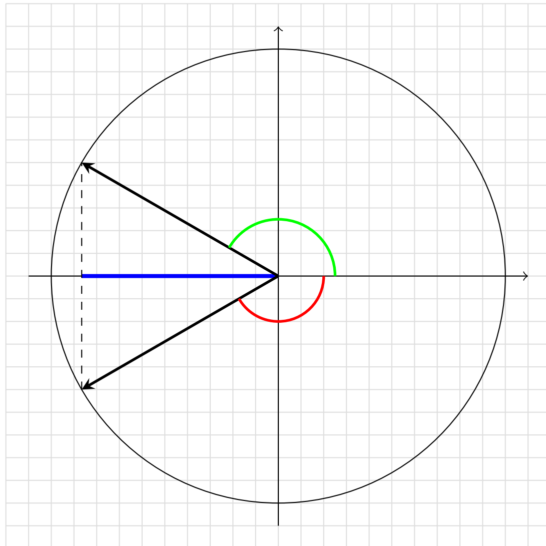
und damit

$$0.5\,\alpha_1 = \frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad 0.5\,\alpha_2 = -\frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

wobei der Faktor 0.5 aus

$$T(\alpha) = 0.5\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ und zusammenfassen ergibt

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{5\,\pi}{3} + n \cdot 4\pi$$

i) Mit

$$\sin(-3\,\alpha) = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$-3\,\alpha_1 = \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$-3\,\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

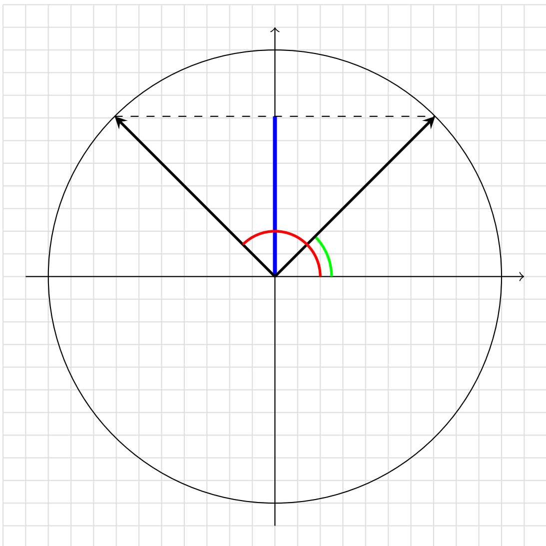
und damit

$$-3\,\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad -3\,\alpha_2 = \frac{3\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

wobei der Faktor -3 aus

$$T(\alpha) = -3\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ ergibt

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{2\,\pi}{3} \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{2\,\pi}{3}$$

j) Mit

$$\cos(-3\,\alpha) = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$-3\,\alpha_1 = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$-3\,\alpha_2 = -\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

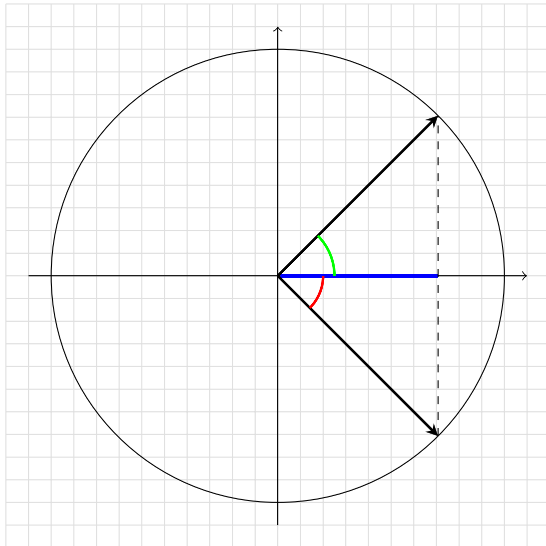
und damit

$$-3\,\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad -3\,\alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

wobei der Faktor -3 aus

$$T(\alpha) = -3\,\alpha$$

bis hierher noch keinen Einfluss hat.



Umformen nach $\alpha_{1,2}$ und zusammenfassen ergibt

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{2\,\pi}{3}$$

k) Mit
$$\sin(0.25\,\alpha) = -1$$
und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung
$$\begin{aligned} 0.25\,\alpha_1 &= \sin^{-1}(-1) + n\cdot 2\pi \quad \wedge \\ 0.25\,\alpha_2 &= \pi - \sin^{-1}(-1) + n\cdot 2\pi \end{aligned}$$
und damit
$$0.25\,\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad \wedge \quad 0.25\,\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$
bzw. zusammengefasst
$$0.25\,\alpha_{1,2} = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$
und umgeformt
$$\alpha_{1,2} = -2\,\pi + n\cdot 8\pi$$

l) Mit
$$\cos(0.25\,\alpha) = -1$$
und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung
$$\begin{aligned} 0.25\,\alpha_1 &= \cos^{-1}(-1) + n\cdot 2\pi \quad \wedge \\ 0.25\,\alpha_2 &= -\cos^{-1}(-1) + n\cdot 2\pi \end{aligned}$$
und damit
$$0.25\,\alpha_1 = \pi + n\cdot 2\pi \quad \wedge \quad 0.25\,\alpha_2 = -\pi + n\cdot 2\pi$$
bzw. zusammengefasst
$$0.25\,\alpha_{1,2} = \pi + n\cdot 2\pi$$
und umgeformt
$$\alpha_{1,2} = 4\,\pi + n\cdot 8\pi$$