Gegeben sind trigonometrische Gleichungen, vergleiche FS 4.13.6

a)	$\sin(\alpha) = 1.5$	b)	$\cos(\alpha) = -1.5$
c)	$\sin(\alpha) = \sqrt{3}$	d)	$\cos(\alpha) = -\sqrt{2}$
e)	$\sin(\alpha) = 0.5$	f)	$\cos(\alpha) = 0.5$
g)	$\sin(\alpha) = -0.5$	h)	$\cos(\alpha) = -0.5$
i)	$\sin(\alpha) = \sqrt{3}/2$	j)	$\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$
k)	$\sin(\alpha) = -\sqrt{3}/2$	l)	$\cos(\alpha) = -\sqrt{3}/2$
m)	$\sin(\alpha) = 1/\sqrt{2}$	n)	$\cos(\alpha) = 1/\sqrt{2}$
o)	$\sin(\alpha) = -1/\sqrt{2}$	p)	$\cos(\alpha) = -1/\sqrt{2}$
q)	$\sin(\alpha) = 1$	r)	$\cos(\alpha) = 1$
s)	$\sin(\alpha) = -1$	t)	$\cos(\alpha) = -1$

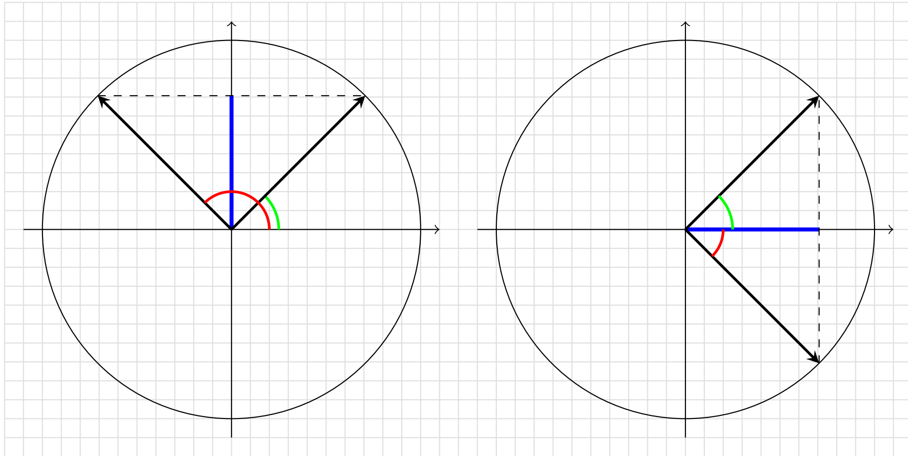
Löse folgende Aufgaben.

1. Gegeben sei die Sinusfunktion f mit
$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$
sowie die Cosinusfunktion g mit
$$g(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$
Zeichne die Graphen $G(f)$ und $G(g)$ in dasselbe Koordinatensystem. Wie lauten der Definitionsbereich D und der Wertebereich W für diese Funktionen und was lässt sich über deren Periodizität sagen?

2. Für welche $R \in \mathbb{R}$ sind die Gleichungen
$$\sin(x) = R \quad \text{und} \quad \cos(x) = R$$
nicht lösbar?

3. Schau dir die Gleichungen a) bis d) an und löse sie, falls möglich.

4. Welche Symmetrieformeln gelten für Sinus- und Cosinuswerte im Einheitskreis?

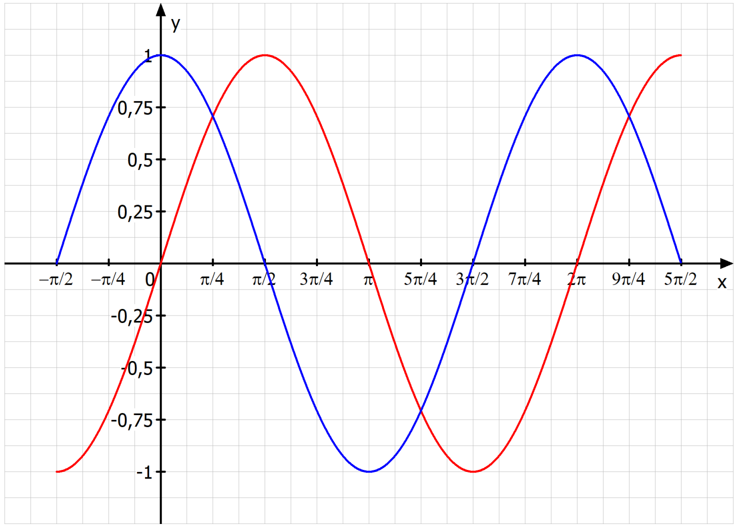


5. Wie lautet die äquivalente Umformung für die Gleichung
$$\sin(\alpha) = R$$
und unter welcher Bedingung ist eine solche möglich?

6. Wie lautet die äquivalente Umformung für die Gleichung
$$\cos(\alpha) = R$$
und unter welcher Bedingung ist eine solche möglich?

7. Lösen die Gleichungen e) bis t).

1. Siehe die Graphen $G(f)$ und $G(g)$ der Sinus- bzw. Cosinusfunktion, vergleiche FS 8.11.



Für beide Funktionen gilt

$$x \in D = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad f(x), g(x) \in W = [-1\,;\,1]$$

d.h. als „Input“ ist jede reelle Zahl (immer ein Winkel in Radiant oder Grad) erlaubt und als „Output“ kommen nur die Funktionswerte

$$-1 \le f(x), g(x) \le 1$$

in Frage. Mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

und

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

d.h. beide Funktionen haben eine Periodelänge von $2\pi \approx 6.28$, vergleiche FS 6.3.3.

2. Die Gleichungen

$$\sin(x) = R \quad \text{und} \quad \cos(x) = R$$

sind für

$$|R| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad R < -1 \quad \vee \quad 1 < R \quad \Leftrightarrow \quad R \notin [-1\,;\,1]$$

nicht lösbar, denn der Sinuswert R bzw. der Cosinuswert R muss im Intervall $W = [-1\,;\,1]$ liegen, vergleiche Aufgabe 1 und Einheitskreis.

3. Gemäss Aufgabe 1 und 2 muss

$$R, R \in W = [-1\,;\,1]$$

gelten, d.h. die Gleichungen a) bis d) sind wegen

$$\sin(\alpha) = 1.5 \notin W \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \sqrt{3} \approx 1.7 \notin W$$

sowie

$$\cos(\alpha) = -1.5 \notin W \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = -\sqrt{2} \approx -1.4 \notin W$$

nicht lösbar.

4. Es gilt

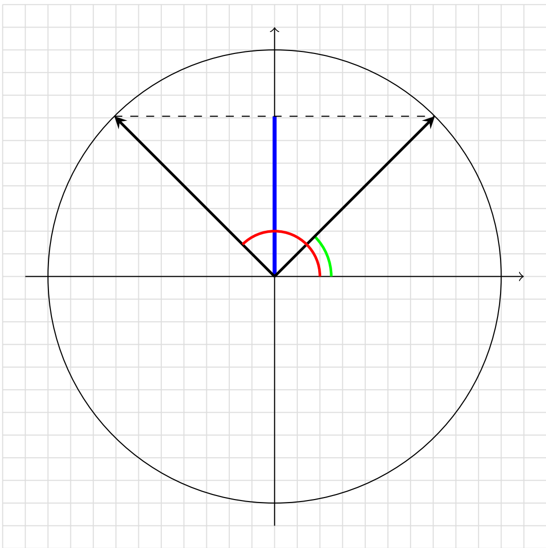
$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

d.h. beispielsweise

$$\sin(45^\circ) = \sin(135^\circ) \quad \text{und} \quad \cos(45^\circ) = \cos(-45^\circ)$$

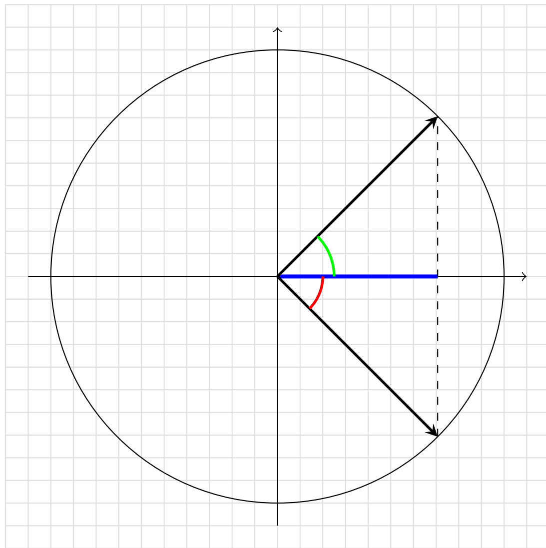
vergleiche FS 6.3.4.

5. Für
$$|R| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq R \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad R \in [-1\,;\,1]$$
gilt die Umformung
$$\sin(\alpha) = R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \arcsin(R) + n \cdot 2\pi \\ \alpha_2 = \pi - \arcsin(R) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
mit $n \in \mathbb{Z}$, vergleiche FS 4.13.6 und Einheitskreis.



Es gibt die zwei „Basislösungen“
$$\arcsin(R) \quad \text{und} \quad \pi - \arcsin(R)$$
wobei ein Taschenrechner immer nur den ersten Winkel
$$\arcsin(R) \in [-90^\circ\,;\,90^\circ] \qquad \text{bzw.} \qquad \arcsin(R) \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$$
aus dem rechten Halbkreis zurückgeben kann und der zweite Winkel sowie die Periode
$$\pi - \arcsin(R) \qquad \text{bzw.} \qquad \ldots + n \cdot 2\pi$$
von Hand hinzugefügt werden muss.

6. Für
$$|R| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq R \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad R \in [-1\,;\,1]$$
gilt die Umformung
$$\cos(\alpha) = R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \arccos(R) + n \cdot 2\pi \\ \alpha_2 = -\arccos(R) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$
mit $n \in \mathbb{Z}$, vergleiche FS 4.13.6 und Einheitskreis.



Es gibt die zwei „Basislösungen“
$$\arccos(R) \quad \text{und} \quad -\arccos(R)$$
wobei ein Taschenrechner immer nur den ersten Winkel
$$\arccos(R) \in [0^\circ\,;\,180^\circ] \qquad \text{bzw.} \qquad \arccos(R) \in [0\,;\,\pi]$$
aus dem oberen Halbkreis zurückgeben kann und der zweite Winkel sowie die Periode
$$-\arccos(R) \qquad \text{bzw.} \qquad \ldots + n \cdot 2\pi$$
von Hand hinzugefügt werden muss.

7. e) Mit

$$\sin(\alpha) = 0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

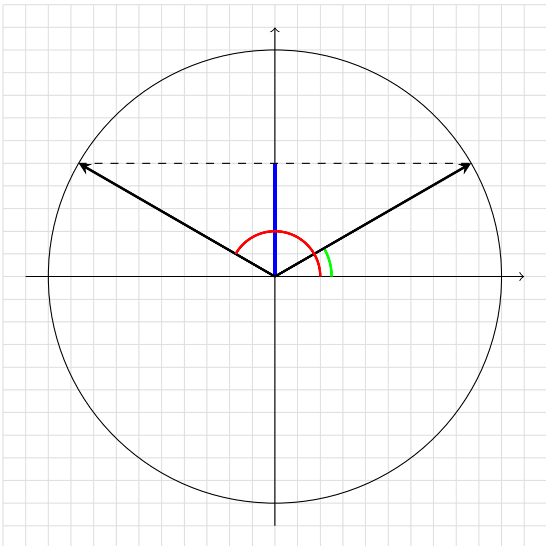
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(0.5) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(0.5) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{6} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{5\,\pi}{6}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

f) Mit

$$\cos(\alpha) = 0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

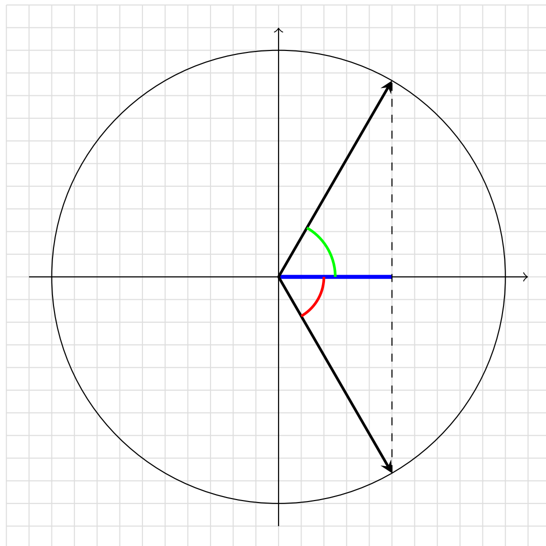
$$\alpha_1 = \cos^{-1}(0.5) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = -\cos^{-1}(0.5) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{3} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{\pi}{3}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\alpha_1$ hinzugefügt werden.

g) Mit

$$\sin(\alpha) = -0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

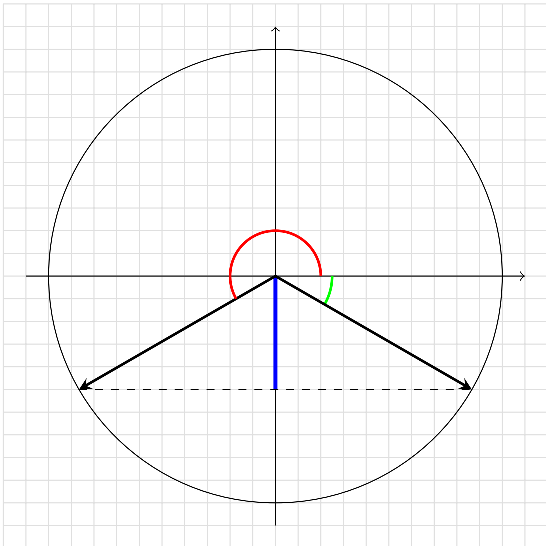
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(-0.5) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(-0.5) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{7\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $-\frac{\pi}{6} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{7\,\pi}{6}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

h) Mit

$$\cos(\alpha) = -0.5$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

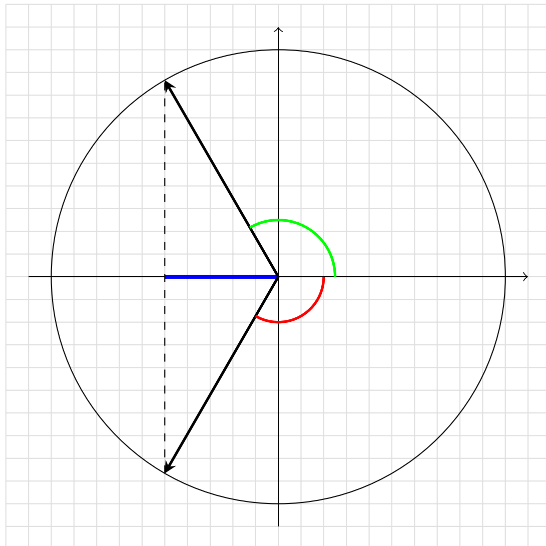
$$\alpha_1 = \cos^{-1}(-0.5) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = -\cos^{-1}(-0.5) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{2\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{2\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{2\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{2\,\pi}{3} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{2\,\pi}{3}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\,\alpha_1$ hinzugefügt werden.

i) Mit

$$\sin(\alpha) = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

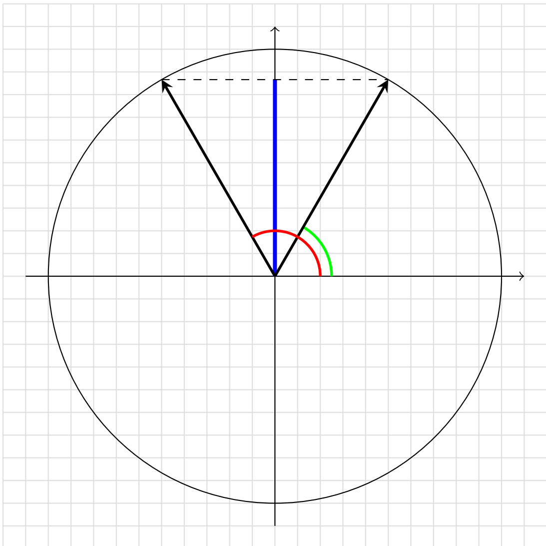
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{2\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{3} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{2\,\pi}{3}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

j) Mit

$$\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

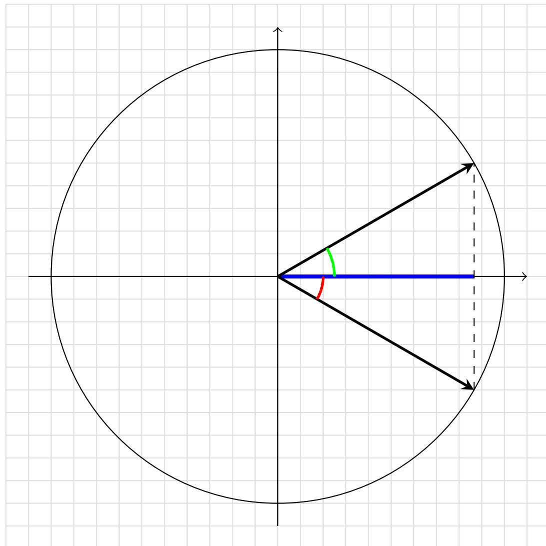
$$\alpha_1 = \cos^{-1}(\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = -\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{6} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{\pi}{6}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\alpha_1$ hinzugefügt werden.

k) Mit

$$\sin(\alpha) = -\sqrt{3}/2 \approx -0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

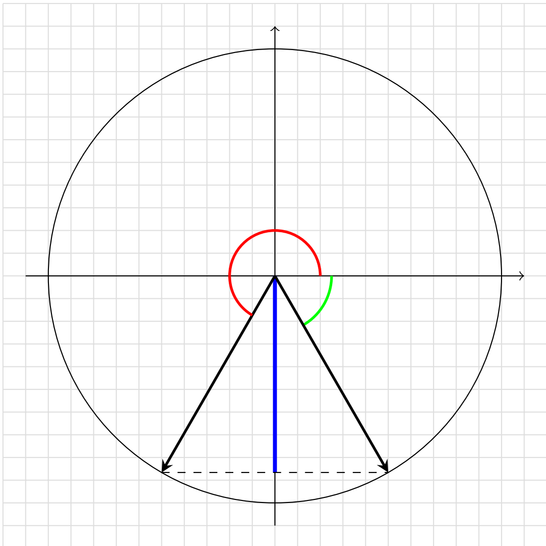
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= \pi - \sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{4\,\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{4\,\pi}{3}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

l) Mit

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{3}/2 \approx -0.866$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

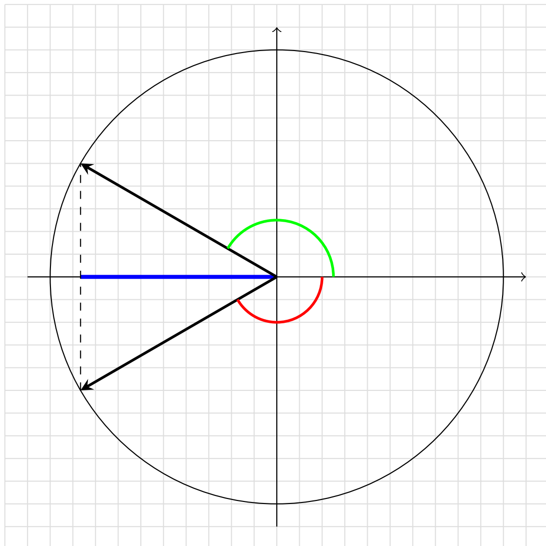
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= -\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{5\,\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{5\,\pi}{6} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{5\,\pi}{6}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\,\alpha_1$ hinzugefügt werden.

m) Mit

$$\sin(\alpha) = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

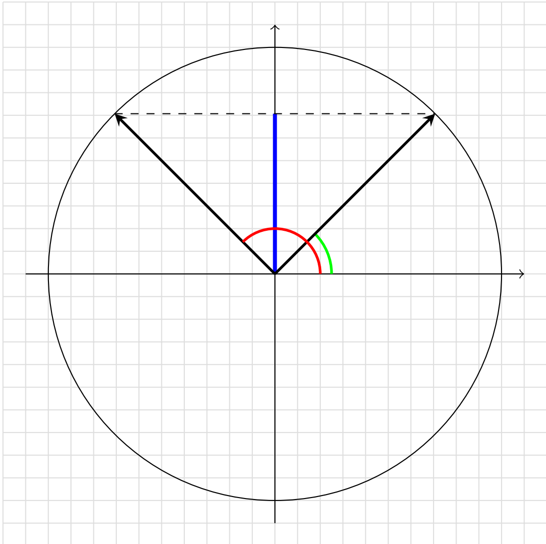
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{3\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{4} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{3\,\pi}{4}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

n) Mit

$$\cos(\alpha) = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

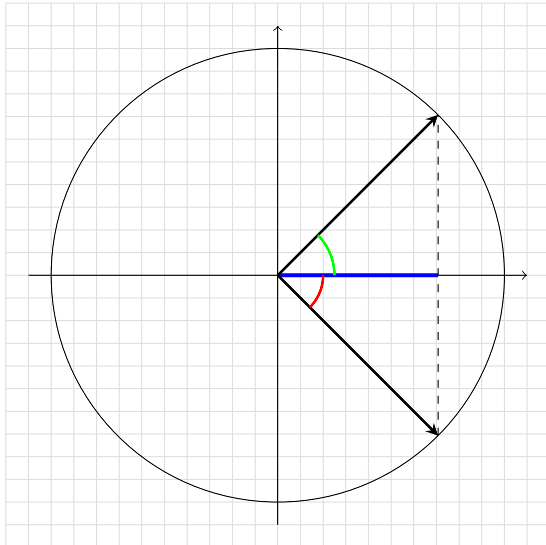
$$\alpha_1 = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = -\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{\pi}{4} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{\pi}{4}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\alpha_1$ hinzugefügt werden.

o) Mit

$$\sin(\alpha) = -1/\sqrt{2} \approx -0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

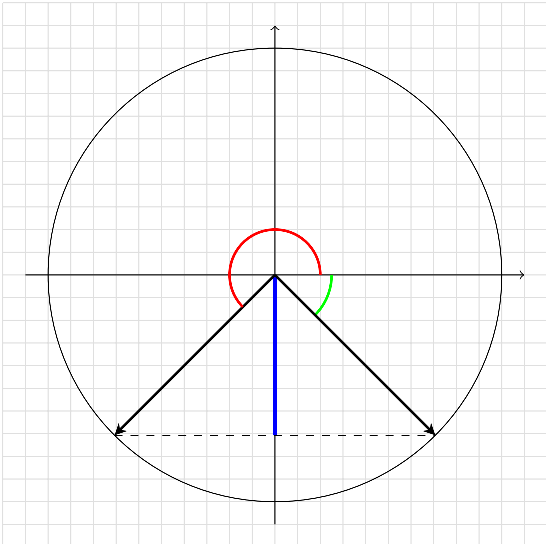
$$\alpha_1 = \sin^{-1}(-1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}(-1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + n \cdot 2\pi$$

bzw. vereinfacht

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{5\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkussinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $-\frac{\pi}{4} \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]$ (rechter Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $\frac{5\,\pi}{4}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ hinzugefügt werden.

p) Mit

$$\cos(\alpha) = -1/\sqrt{2} \approx -0.707$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

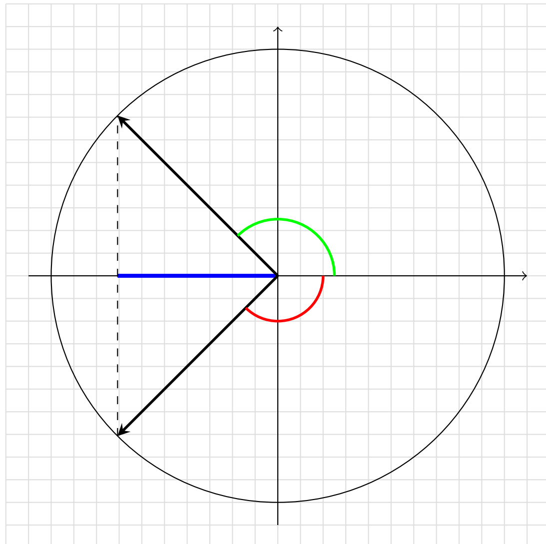
$$\alpha_1 = \cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi \quad \wedge$$
$$\alpha_2 = -\cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) + n \cdot 2\pi$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{3\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\frac{3\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{3\,\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$



Bemerkung: Arkuscosinus ist eine Funktion und kann daher nur den ersten Winkel $\frac{3\,\pi}{4} \in [0\,;\,\pi]$ (oberer Halbkreis) zurückgeben und der zweite Winkel $-\frac{3\,\pi}{4}$ muss mit Hilfe der Symmetrieformel $\alpha_2 = -\alpha_1$ hinzugefügt werden.

q) Mit

$$\sin(\alpha) = 1$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^{-1}(1) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= \pi - \sin^{-1}(1) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pi/2 + n \cdot 2\pi$$

Die beiden Drehzeiger fallen zu einem zusammen, welcher genau nach oben zeigt.

r) Mit

$$\cos(\alpha) = 1$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos^{-1}(1) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= -\cos^{-1}(1) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = 0 + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -0 + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = n \cdot 2\pi$$

Die beiden Drehzeiger fallen zu einem zusammen, welcher genau nach rechts zeigt.

s) Mit

$$\sin(\alpha) = -1$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^{-1}(-1) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= \pi - \sin^{-1}(-1) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = -\pi/2 + n \cdot 2\pi$$

Die beiden Drehzeiger fallen zu einem zusammen, welcher genau nach unten zeigt.

t) Mit

$$\cos(\alpha) = -1$$

und $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Umformung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos^{-1}(-1) + n \cdot 2\pi \quad \wedge \\ \alpha_2 &= -\cos^{-1}(-1) + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha_1 = \pi + n \cdot 2\pi \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\pi + n \cdot 2\pi$$

bzw. zusammengefasst

$$\alpha_{1,2} = \pi + n \cdot 2\pi$$

Die beiden Drehzeiger fallen zu einem zusammen, welcher genau nach links zeigt.