Gegeben ist eine Exponentialfunktion f, vergleiche FS 8.9, mit

$$f(x) = 2^{x-2}$$

Gesucht ist eine Wertetabelle für $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ und daraus abgeleitet der Definitions- und Wertebereich, sowie der Graph. Ausserdem soll die Umkehrfunktion f^{-1} berechnet werden, ausgesprochen „f invers“. Man überprüfe, ob das Einsetzen der y-Werte aus der Wertetabelle in die Umkehrfunktion wieder deren x-Werte ergibt.

---

1. Einsetzen der x-Werte ergibt die Wertetabelle

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	0.125	0.25	0.5	1	2

2. Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W_f = \mathbb{R}^+$, vergleiche die rote Kurve in der Zeichnung sowie FS 8.9.

3. Die Zuordnungsvorschrift mit y anstatt $f(x)$ schreiben ergibt

$$f(x) = 2^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2^{x-2}$$

und nach x umstellen

$$y = 2^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = \log_2(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2(y) + 2$$

Sobald die Zuordnungsvorschrift nach x umgestellt ist, werden x und y vertauscht und anstatt y wird wieder $f^{-1}(x)$ geschrieben

$$y = \log_2(x) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_2(x) + 2$$

4. Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ und Wertebereich $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, vergleiche die blaue Kurve in der Zeichnung sowie FS 8.10.

5. Setzt man z.B. $x = 2$ in die Umkehrfunktion f^{-1} ein, so erhält man

$$f^{-1}(2) = \log_2(2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

womit f^{-1} genau die „umgekehrte“ Wirkung von f hat, wo man

$$f(3) = 2^{3-2} = 2$$

erhält. Die obige Wertetabelle wird durch f^{-1} „umgekehrt“

x	0.125	0.25	0.5	1	2
$y = f^{-1}(x)$	-1	0	1	2	3

6. Die Graphen von f und f^{-1} spiegeln sich an der Identität $y = x$, d.h. an der grünen Gerade mit Steigung $m = 1$, bzw. Steigungswinkel $\alpha = 45°$, wobei gleiche Skalierung der Achsen vorausgesetzt wird.