Gegeben ist eine Logarithmusfunktion f (siehe FS 8.10) mit

$$f(x) = \log_3(3\,x + 9) - 1$$

Gesucht sind der Definitionsbereich, die Nullstelle, der y-Achsenabschnitt, die Asymptote und der Wertebereich. Zeichne den Graphen von f und bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für welche $-1 \leq f(x) \leq 2$ gilt.

---

1. Zuordnungsvorschrift vereinfachen

   $$f(x) = \log_3(3\,(x+3)) - 1 = \log_3(3) + \log_3(x+3) - 1 = \log_3(x+3)$$

   unter Verwendung von

   $$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v) \quad \text{und} \quad \log_b(b) = 1$$

   vergleiche FS 2.10

2. Funktion diskutieren

   a) Definitionsbereich $D = \,]-3\,;\,\infty[$ wegen

   $$x + 3 > 0$$

   b) Nullstelle bei $x = -2$ wegen

   $$\log_3(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = 3^0 = 1$$

   vergleiche FS 2.10

   c) y-Achsenabschnitt bei

   $$f(0) = \log_3(0+3) = 1$$

   d) Senkrechte Asymptote bei $x = -3$ wegen D

   e) Wertebereich $W = \mathbb{R}$

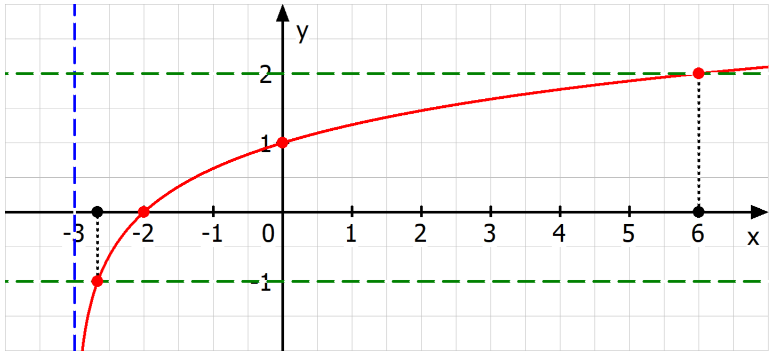
   f) Zwei frei gewählte Hilfspunkte

   $$f(6) = \log_3(6+3) = 2$$

   und

   $$f(-8/3) = \log_3(-8/3+3) = \log_3(1/3) = -1$$

   helfen den Graphen zu zeichnen.



   Die x-Werte der Hilfspunkte werden mit Vorteil so gewählt, dass im Numerus des Logarithmus Potenzen mit Basis 3 stehen, hier 9 bzw. $1/3$, wodurch kein Taschenrechner nötig ist.

3. Die Bedingung $-1 \leq f(x) \leq 2$ bedeutet, dass der Graph von f im Intervall $y \in [-1\,;\,2]$ verlaufen muss. Mit den beiden frei gewählten Hilfspunkten gilt

   $$x \in [-8/3\,;\,6]$$

   vergleiche die schwarzen Punkte auf der x-Achse. Ohne die Hilfspunkte müsste man die beiden Gleichungen

   $$f(x) = \log_3(x+3) = -1 \quad \text{und} \quad f(x) = \log_3(x+3) = 2$$

   nach x auflösen, um $x = -8/3$ bzw. $x = 6$ zu erhalten.