Gegeben ist eine gebrochenlineare Funktion f mit

$$f(x) = \frac{-4x-3}{x+1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

und eine Exponentialfunktion g mit

$$g(x) = 2^{x+1} - 4$$

Gesucht sind je der Graph und die Herleitung der Asymptote.

---

1. Eine Polynomdivision mit Rest R gemäss

$$f(x) = Z(x) : N(x) = a(x) + \frac{R}{N(x)} = a(x) + d(x)$$

vergleiche FS 8.8, liefert für f die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = -4 + \frac{1}{x+1}$$

d.h. man kann f als Summe von a und d mit

$$f(x) = a(x) + d(x)$$

schreiben, wobei

$$a(x) = -4 \quad \text{und} \quad d(x) = \frac{1}{x+1} \approx \frac{1}{x}$$

gilt.

2. Wegen

$$f(x) = a(x) + d(x) \quad \Leftrightarrow \quad d(x) = f(x) - a(x)$$

kann man sich die Differenz d als Abstand (mit Vorzeichen) zwischen den Graphen von f und a vorstellen.

3. Die Zuordnungsvorschrift von g kann man umschreiben zu

$$g(x) = -4 + 2^{x+1}$$

d.h. man kann auch g als Summe von a und d mit

$$g(x) = a(x) + d(x)$$

schreiben, wobei

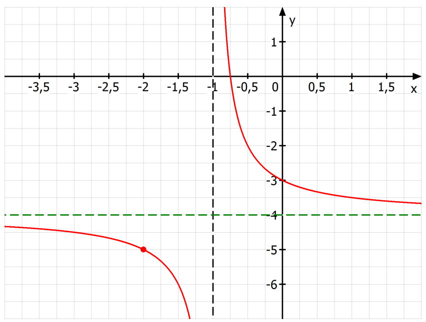
$$a(x) = -4 \quad \text{und} \quad d(x) = 2^{x+1} \approx 2^x$$

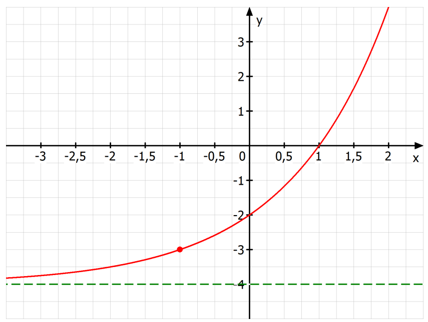
gilt.

4. Die Grundfunktionen von f und g sind gegeben durch

$$\frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad 2^x$$

vergleiche FS 8.8 und 8.9, wobei beide Graphen um 1 nach links und um 4 nach unten verschoben sind.





Im Folgenden soll für beide Funktionen und für $x \to \pm\infty$ die Differenz d genauer untersucht werden.

5. Für die Differenz d der Funktion f gilt $d(x) \approx 1/x$.

   „Weit rechts“ gilt mit $x \to \infty$

   $$d(\infty) \approx 1/\infty = 0^+$$

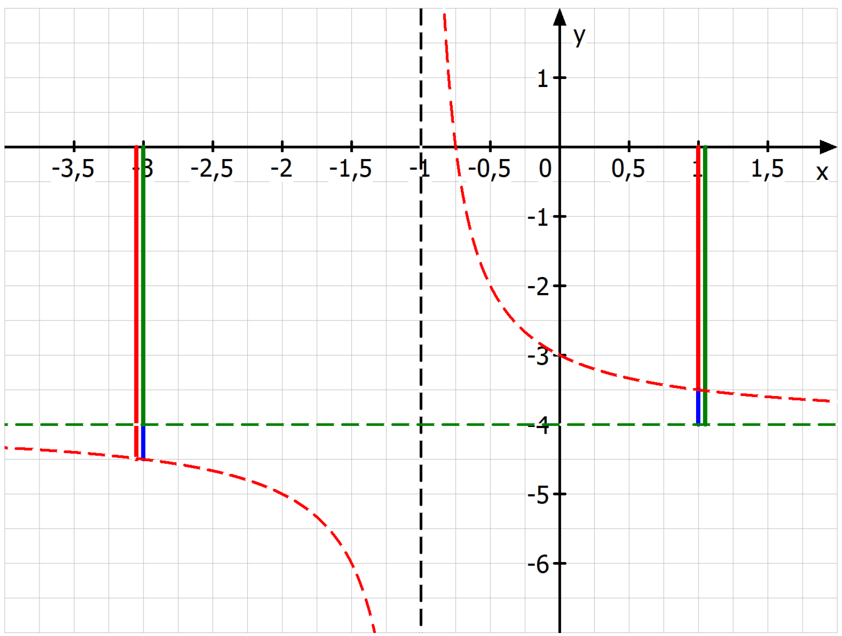
   womit ein positiver blauer y-Wert 0^+ zum grünen y-Wert -4 dazu addiert wird und der rote y-Wert von f oberhalb von a liegt.

   „Weit links“ gilt mit $x \to -\infty$

   $$d(-\infty) \approx -1/\infty = 0^-$$

   womit ein negativer blauer y-Wert 0^- zum grünen y-Wert -4 dazu addiert wird und der rote y-Wert von f unterhalb von a liegt.

   Damit ist a für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ die Asymptote von f.



6. Für die Differenz d der Funktion f gilt $d(x) \approx 2^x$.

   „Weit rechts“ gilt mit $x \to \infty$

   $$d(\infty) \approx 2^\infty = \infty$$

   womit f unendlich weit oberhalb von a liegt, vergleiche die Zeichnung.

   „Weit links“ gilt mit $x \to -\infty$

   $$d(-\infty) \approx 2^{-\infty} = 1/2^\infty = 0^+$$

   womit ein positiver blauer y-Wert 0^+ zum grünen y-Wert -4 dazu addiert wird und der rote y-Wert von f oberhalb von a liegt.

   Damit ist a nur für $x \to -\infty$ die Asymptote von f.