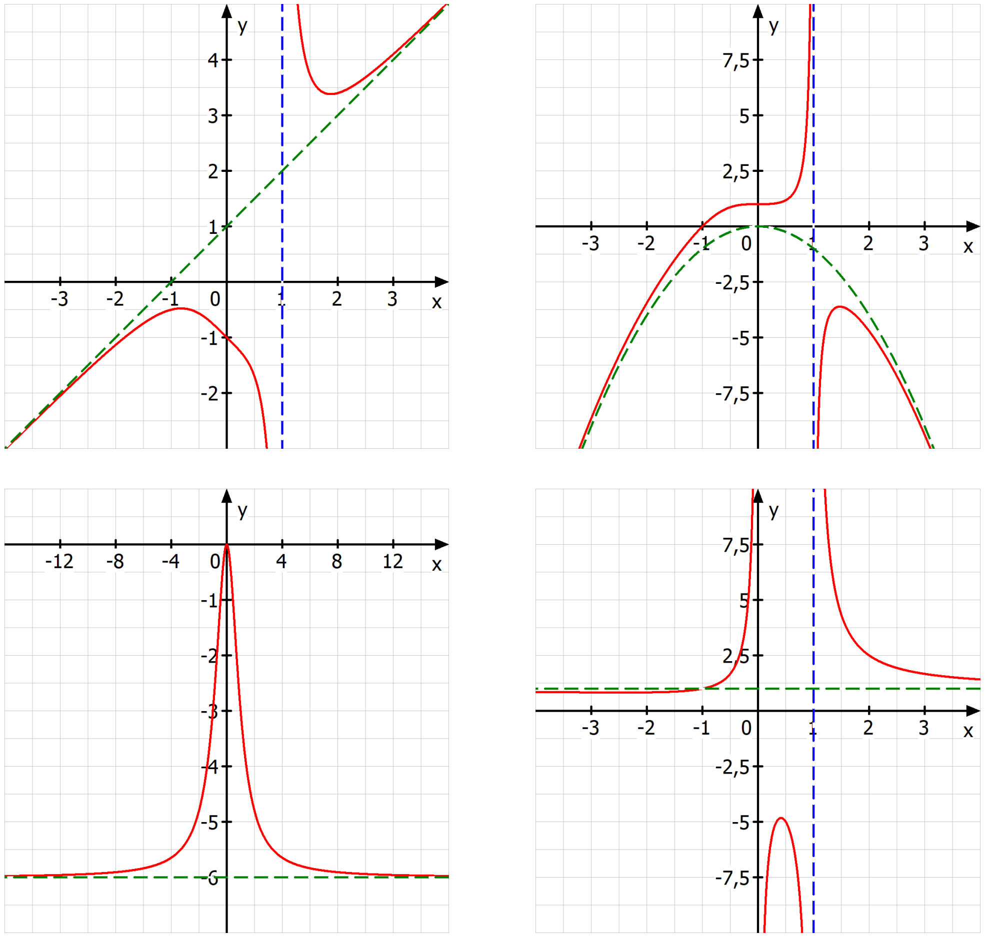
Gegeben sind vier gebrochenrationale Funktionen und vier Graphen

1. $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}$ 2. $\dfrac{-6\,x^2}{x^2+1}$ 3. $\dfrac{x^5+1}{1-x^3}$ 4. $\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$

Gesucht sind die Polstellen und der Definitionsbereich, die Nullstellen, der y-Achsenabschnitt sowie die Asymptote a und die Differenz d. Jeder Funktion soll ihr Graph zugeordnet werden.



Zuerst werden alle vier Funktionen diskutiert.

1. Funktion f_1 mit

$$f_1(x)=\frac{x^2+1}{x^2-x}$$

Zwei Polstellen mit VZW bei $x_1=0$ und $x_2=1$ wegen

$$N(x)=x^2-x=x\,(x-1)=0$$

und damit

$$D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$

Keine Nullstelle wegen

$$Z(x)=x^2+1\geq 1>0$$

Der y-Achsenabschnitt $f(0)$ ist nicht definiert wegen $0\notin D$.
Eine Polynomdivision liefert

$$f_1(x)=1+\frac{x+1}{x^2-x}$$

und damit die Asymptote $a(x)=1$ sowie

$$d(x)=\frac{x+1}{x^2-x}\approx\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

Es gilt $d(-\infty)=0^-$ (unterhalb) und $d(\infty)=0^+$ (oberhalb)

2. Funktion f_2 mit

$$f_2(x)=\frac{-6\,x^2}{x^2+1}$$

Keine Polstelle wegen

$$N(x)=x^2+1\geq 1>0$$

und damit

$$D=\mathbb{R}$$

Eine Nullstelle ohne VZW bei $x = 0$ wegen

$$Z(x) = -6\,x^2 = 0$$

Der mit der Nullstelle identische y-Achsenabschnitt liegt bei

$$f(0) = 0$$

Eine Polynomdivision liefert

$$f_2(x) = -6 + \frac{6}{x^2+1}$$

und damit die Asymptote $a(x) = -6$ sowie

$$d(x) = \frac{6}{x^2+1} \approx \frac{1}{x^2}$$

Es gilt $d(\pm\infty) = 0^+$ (beide oberhalb)

3. Funktion f_3 mit

$$f_3(x) = \frac{x^5+1}{1-x^3}$$

Eine Polstelle mit VZW bei $x = 1$ wegen

$$N(x) = 1 - x^3 = 0$$

und damit

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Eine Nullstelle mit VZW bei $x = -1$ wegen

$$Z(x) = x^5 + 1 = 0$$

Der y-Achsenabschnitt liegt bei

$$f(0) = 1$$

Eine Polynomdivision liefert

$$f_3(x) = -x^2 + \frac{x^2+1}{-x^3+1}$$

und damit die Asymptote $a(x) = -x^2$ sowie

$$d(x) = \frac{x^2+1}{-x^3+1} \approx -\frac{x^2}{x^3} = -\frac{1}{x}$$

Es gilt $d(-\infty) = 0^+$ (oberhalb) und $d(\infty) = 0^-$ (unterhalb)

4. Funktion f_4 mit

$$f_4(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$$

Eine Polstelle mit VZW bei $x = 1$ wegen

$$N(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + 1(x-1) = (x^2+1)(x-1) = 0$$

und damit

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Keine Nullstelle wegen

$$Z(x) = x^4 + 1 \geq 1 > 0$$

Der y-Achsenabschnitt liegt bei

$$f(0) = -1$$

Eine Polynomdivision liefert

$$f_4(x) = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}$$

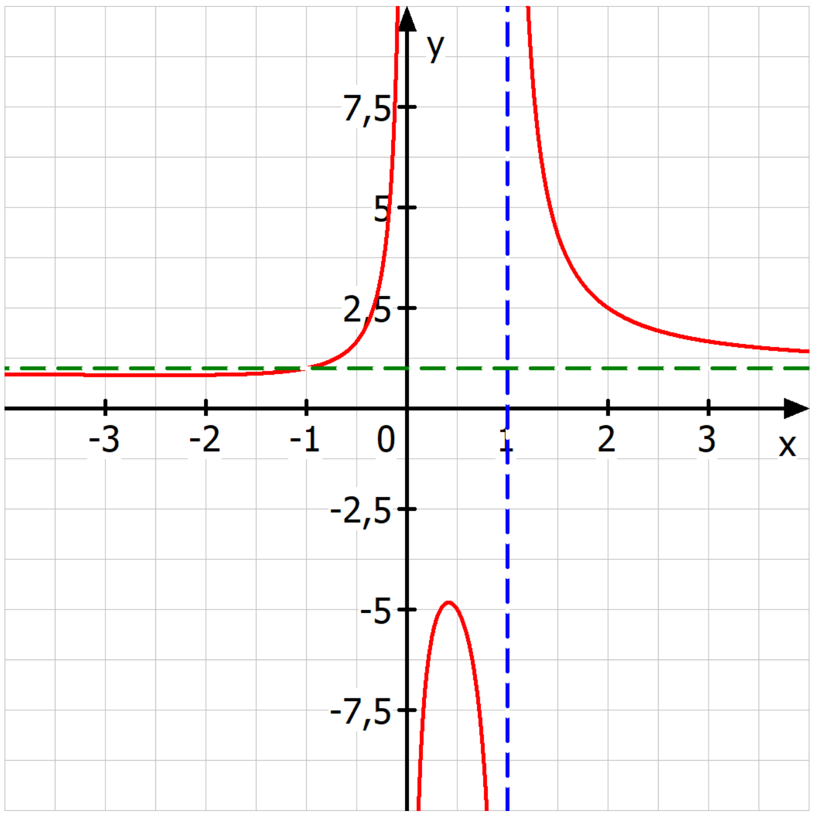
und damit die Asymptote $a(x) = x + 1$ sowie

$$d(x) = \frac{2}{x^3-x^2+x-1} \approx \frac{1}{x^3}$$

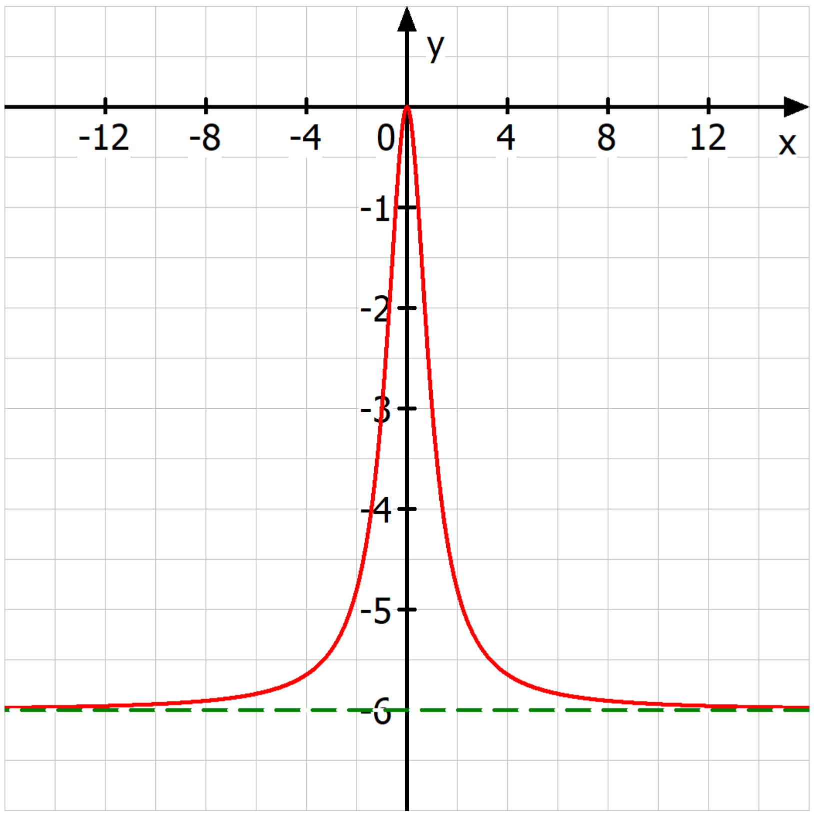
Es gilt $d(-\infty) = 0^-$ (unterhalb) und $d(\infty) = 0^+$ (oberhalb)

5. Es folgt die Zuordnung der Graphen.

1. Funktion f_1 mit
$$f_1(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}$$
   a) Polstellen mit VZW bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$
   b) keine Nullstelle
   c) kein y-Achsenabschnitt
   d) Asymptote $a(x) = 1$
   e) f_1 links unterhalb und rechts oberhalb von a



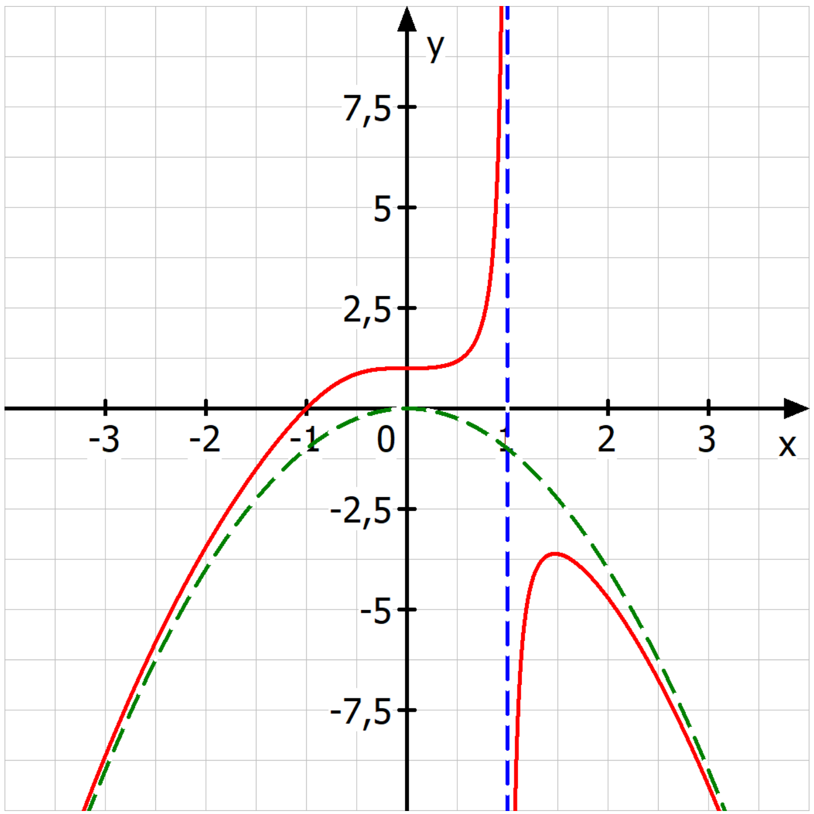
2. Funktion f_2 mit
$$f_2(x) = \frac{-6\,x^2}{x^2+1}$$
   a) keine Polstelle
   b) Nullstelle ohne VZW bei $x = 0$, d.h. Berührung der x-Achse
   c) y-Achsenabschnitt identisch mit Nullstelle
   d) Asymptote $a(x) = -6$
   e) f_2 links und rechts oberhalb von a



3. Funktion f_3 mit

$$f_3(x) = \frac{x^5+1}{1-x^3}$$

a) Polstelle mit VZW bei $x = 1$
b) Nullstelle mit VZW bei $x = -1$
c) y-Achsenabschnitt bei $f(0) = 1$
d) Asymptote $a(x) = -x^2$ mit Grad 2
e) f_3 links oberhalb und rechts unterhalb von a



4. Funktion f_4 mit

$$f_4(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$$

a) Polstelle mit VZW bei $x = 1$
b) Keine Nullstelle
c) y-Achsenabschnitt bei $f(0) = -1$
d) Asymptote $a(x) = x + 1$ mit Grad 1
e) f_4 links unterhalb und rechts oberhalb von a