Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f (siehe FS 8.7) mit

$$f(x) = \frac{x-1}{2\,x^2-4\,x-6} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht sind die Polstelle(n), der Definitionsbereich, die Nullstelle(n), der y-Achsenabschnitt, die Asymptote a und die Differenz d, d.h. „ober- und unterhalb“ für $x \to \pm\infty$.

---

1. Eine Linearfaktorzerlegung liefert

$$f(x) = \frac{x-1}{2\,(x^2-2\,x-3)} = \frac{x-1}{2\,(x+1)(x-3)}$$

2. Polstellen mit VZW bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ wegen

$$N(x) = 2\,(x+1)(x-3) = 0$$

3. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

4. Nullstelle mit VZW bei $x = 1$ wegen

$$Z(x) = x - 1 = 0$$

5. y-Achsenabschnitt bei $f(0) = 1/6 \approx 0.167$

6. f ist schon echt gebrochen, d.h. man kann schreiben

$$f(x) = 0 + \frac{x-1}{2\,x^2-4\,x-6}$$

und damit sind a und d gegeben durch

$$a(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{x-1}{2\,x^2-4\,x-6} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

7. Für $x \to \pm\infty$ gilt

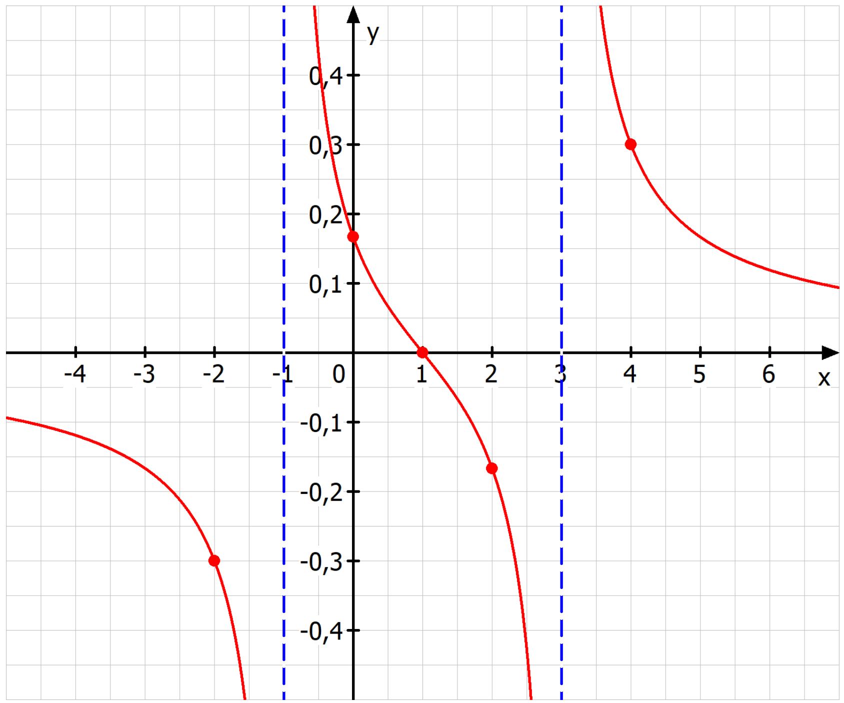
$$d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+ \quad \text{bzw.} \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

d.h. f verläuft „weit rechts“ oberhalb von a, und „weit links“ unterhalb von a.

8. Drei frei gewählte Hilfspunkte

$$f(-2) = -0.3 \quad \text{und} \quad f(2) \approx -0.167 \quad \text{sowie} \quad f(4) = 0.3$$

helfen den Graphen zu zeichnen.



Weil f schon echt gebrochen ist, gilt für die Differenz $d = f$, und mit $a(x) = 0$ ist die x-Achse die Asymptote, siehe FS 8.7.4.