

Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f (siehe FS 8.7) mit

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 - 8} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht sind die Polstelle(n), der Definitionsbereich, die Nullstelle(n), der y -Achsenabschnitt, die Asymptote a und die Differenz d , d.h. „ober- und unterhalb“ für $x \rightarrow \pm\infty$.

1. Das 3. Binom liefert

$$f(x) = \frac{x}{2(x^2 - 4)} = \frac{x}{2(x+2)(x-2)}$$

2. Polstellen mit VZW bei $x_{1,2} = \pm 2$ wegen

$$N(x) = 2(x+2)(x-2) = 0$$

3. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

4. Nullstelle mit VZW bei $x = 0$ wegen

$$Z(x) = x = 0$$

5. y -Achsenabschnitt bei $f(0) = 0$, d.h. identisch mit der Nullstelle

6. f ist schon echt gebrochen, d.h. man kann schreiben

$$f(x) = 0 + \frac{x}{2x^2 - 8}$$

und damit sind a und d gegeben durch

$$a(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{x}{2x^2 - 8} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

7. Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt

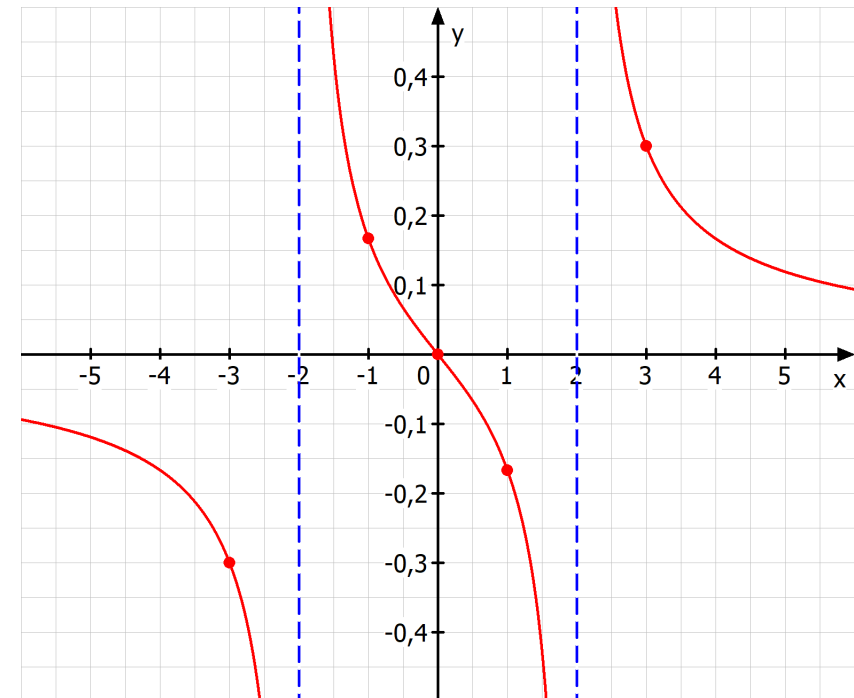
$$d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+ \quad \text{bzw.} \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

d.h. f verläuft „weit rechts“ oberhalb von a , und „weit links“ unterhalb von a .

8. Vier frei gewählte Hilfspunkte

$$f(\pm 3) = \pm 0.3 \quad \text{und} \quad f(\pm 1) = \mp 1/6 = \mp 0.167$$

helfen den Graphen zu zeichnen.



Weil f schon echt gebrochen ist, gilt für die Differenz $d = f$, und mit $a(x) = 0$ ist die x -Achse die Asymptote, siehe FS 8.7.4.