Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f (siehe FS 8.7) mit

$$f(x) = \frac{0.5\,x^2 - x - 4}{x-2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht sind die Polstelle(n), der Definitionsbereich, die Nullstelle(n), der y-Achsenabschnitt, die Asymptote a und die Differenz d, d.h. „ober- und unterhalb" für $x \to \pm\infty$.

---

1. Eine Linearfaktorzerlegung liefert

$$f(x) = \frac{0.5\,(x^2 - 2\,x - 8)}{x-2} = \frac{0.5\,(x+2)(x-4)}{x-2}$$

2. Polstelle mit VZW bei $x = 2$ wegen

$$N(x) = x - 2 = 0$$

3. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

4. Nullstellen mit VZW bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ wegen

$$Z(x) = 0.5\,(x+2)(x-4) = 0$$

5. y-Achsenabschnitt bei $f(0) = 2$

6. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (0.5\,x^2 - x - 4) : (x-2) = 0.5\,x + \frac{-4}{x-2}$$

und damit a sowie d mit

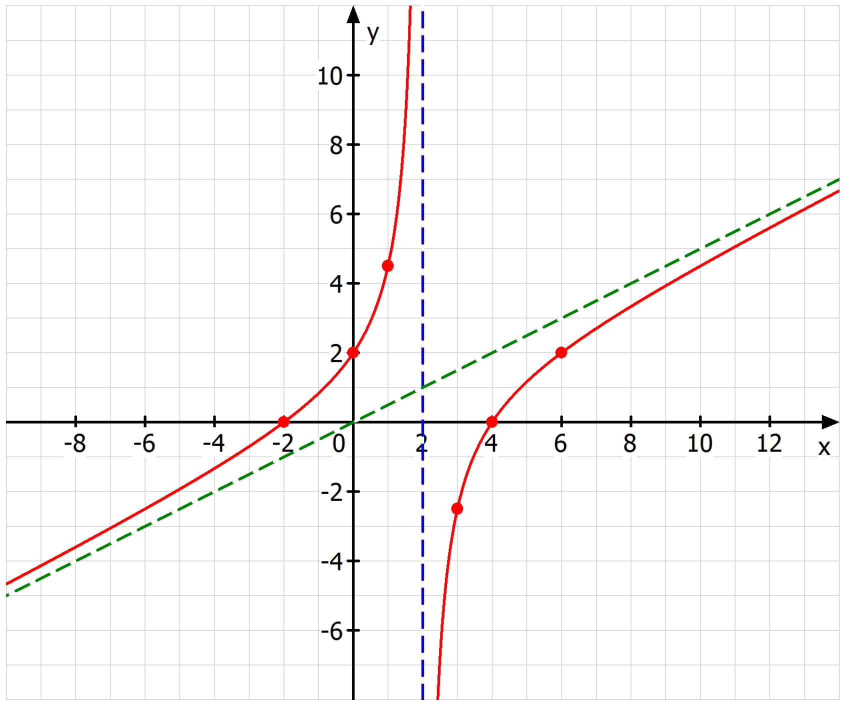
$$a(x) = 0.5\,x \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{-4}{x-2} \approx \frac{-1}{x}$$

7. Für $x \to \pm\infty$ gilt

$$d(\infty) \approx \frac{-1}{\infty} = 0^- \quad \text{bzw.} \quad d(-\infty) \approx \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$

d.h. f verläuft „weit rechts" unterhalb von a, und „weit links" oberhalb von a.

8. Einen frei gewählten Hilfspunkt $f(1) = 4.5$ sowie die Nullstellen kann man am Symmetriezentrum $S(2;1)$ spiegeln und hat damit insgesamt 6 Punkte, die genau eingezeichnet werden können. Da die Polstelle zwischen den beiden Nullstellen liegt, hat der Graph eine andere Form als bei den vorherigen Aufgaben.



Das Symmetriezentrum erhält man, indem man die Polstelle in die Asymptote einsetzt, also $a(2) = 1$ berechnet.