Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f (siehe FS 8.7) mit

$$f(x) = \frac{-x^2 + 8\,x - 12}{x+2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht sind die Polstelle(n), der Definitionsbereich, die Nullstelle(n), der y-Achsenabschnitt, die Asymptote a und die Differenz d, d.h. „ober- und unterhalb“ für $x \to \pm\infty$.

---

1. Eine Linearfaktorzerlegung liefert

$$f(x) = \frac{-\left(x^2 - 8\,x + 12\right)}{x+2} = \frac{-\left(x-2\right)\left(x-6\right)}{x+2}$$

2. Polstelle mit VZW bei $x = -2$ wegen

$$N(x) = x + 2 = 0$$

3. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

4. Nullstellen mit VZW bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ wegen

$$Z(x) = -\left(x-2\right)\left(x-6\right) = 0$$

5. y-Achsenabschnitt bei $f(0) = -6$

6. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = \left(-x^2 + 8\,x - 12\right) : \left(x+2\right) = -\,x + 10 + \frac{-32}{x+2}$$

und damit a sowie d mit

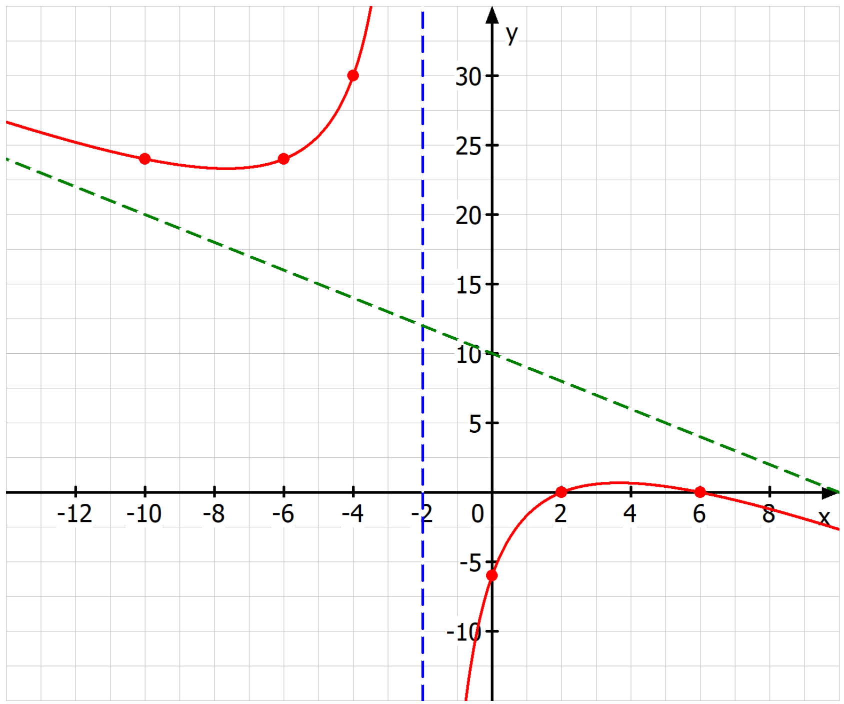
$$a(x) = -\,x + 10 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{-32}{x+2} \approx \frac{-1}{x}$$

7. Für $x \to \pm\infty$ gilt

$$d(\infty) \approx \frac{-1}{\infty} = 0^- \quad \text{bzw.} \quad d(-\infty) \approx \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$

d.h. f verläuft „weit rechts“ unterhalb von a, und „weit links“ oberhalb von a.

8. Die drei Schnittstellen mit den Achsen kann man am Symmetriezentrum $S(-2;12)$ spiegeln und hat damit insgesamt 6 Punkte, die genau eingezeichnet werden können.



Das Symmetriezentrum erhält man, indem man die Polstelle in die Asymptote einsetzt, also $a(-2) = 12$ berechnet.