Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion f (siehe FS 8.7) mit

$$f(x) = \frac{0.5\,x^2 + 3\,x + 4}{x-1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Gesucht sind die Polstelle(n), der Definitionsbereich, die Nullstelle(n), der y-Achsenabschnitt, die Asymptote a und die Differenz d, d.h. „ober- und unterhalb“ für $x \to \pm\infty$.

---

1. Eine Linearfaktorzerlegung liefert

$$f(x) = \frac{0.5\,(x^2 + 6\,x + 8)}{x-1} = \frac{0.5\,(x+4)\,(x+2)}{x-1}$$

2. Polstelle mit VZW bei $x = 1$ wegen

$$N(x) = x - 1 = 0$$

3. Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. Nullstellen mit VZW bei $x_1 = -4$ und $x_2 = -2$ wegen

$$Z(x) = 0.5\,(x+4)\,(x+2) = 0$$

5. y-Achsenabschnitt bei $f(0) = -4$

6. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (0.5\,x^2 + 3\,x + 4) : (x-1) = 0.5\,x + 3.5 + \frac{7.5}{x-1}$$

und damit a sowie d mit

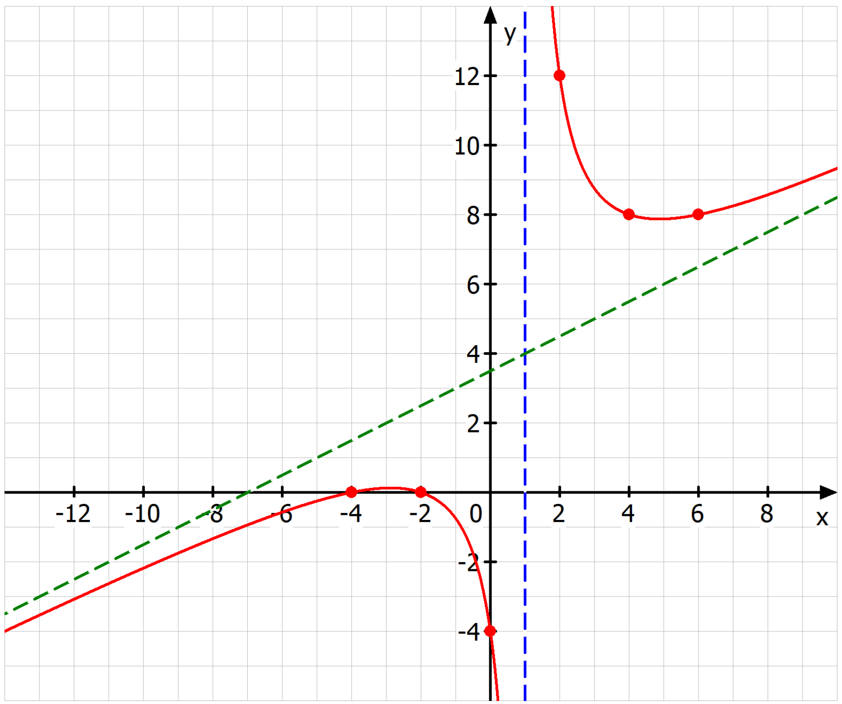
$$a(x) = 0.5\,x + 3.5 \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{7.5}{x-1} \approx \frac{1}{x}$$

7. Für $x \to \pm\infty$ gilt

$$d(\infty) \approx \frac{1}{\infty} = 0^+ \quad \text{bzw.} \quad d(-\infty) \approx \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

d.h. f verläuft „weit rechts“ oberhalb von a, und „weit links“ unterhalb von a.

8. Die drei Schnittstellen mit den Achsen kann man am Symmetriezentrum $S(1;4)$ spiegeln und hat damit insgesamt 6 Punkte, die genau eingezeichnet werden können.



Das Symmetriezentrum erhält man, indem man die Polstelle in die Asymptote einsetzt, also $a(1) = 4$ berechnet.