

Gegeben ist eine Polynomfunktionen f (siehe FS 8.6) mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Gesucht ist die Produktform, sowie Position und Art der Nullstelle(n). Ausserdem soll das Verhalten der Funktion in der näheren Umgebung jeder Nullstelle untersucht werden.

4. Für die nähere Umgebung von $x = 2$ gilt

$$f_2(x) = (2 + 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^2$$

d.h. f verhält sich dort wie die quadratische Funktion

$$p(x) = 4(x - 2)^2$$

1. Gruppenweises Ausklammern liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\ &= (x^2(x - 2) - 4(x - 2)) \\ &= (x - 2)(x^2 - 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - 2) \\ &= (x + 2)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

d.h. eine Nullstelle mit VZW liegt bei $x_1 = -2$ und eine ohne VZW bei $x_2 = 2$.

2. Alternativ kann man durch Probieren eine Nullstelle suchen. Wegen $f(\pm 1) \neq 0$ sind $x_{1,2} = \pm 1$ keine Nullstellen, aber wegen $f(2) = 0$ liegt bei $x = 2$ eine Nullstelle und der Linearfaktor $(x - 2)$ muss enthalten sein. Eine Polynomdivision und das 3. Binom liefern

$$(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) : (x - 2) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

was ebenfalls zur obigen Produktform führt.

3. Für die nähere Umgebung von $x = -2$ gilt

$$f_{-2}(x) = (x + 2)(-2 - 2)^2 = 16(x + 2)$$

d.h. f verhält sich dort wie die Gerade $g(x) = 16(x + 2)$.

