Gegeben ist eine Polynomfunktionen f (siehe FS 8.6) mit

$$f(x) = 3\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x - 12$$

Gesucht ist die Produktform, sowie Position und Art der Nullstelle(n). Ausserdem soll das Verhalten der Funktion in der näheren Umgebung jeder Nullstelle untersucht werden.

---

1. Gruppenweises Ausklammern liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x - 12 \\ &= 3\,(x^3 + x^2 - 4\,x - 4) \\ &= 3\,\Big(x^2\,(x+1) - 4\,(x+1)\Big) \\ &= 3\,(x+1)\,(x^2-4) \\ &= 3\,(x+1)\,(x+2)\,(x-2) \end{aligned}$$

d.h. die Nullstellen liegen bei $x_1 = -1$ und $x_{2,3} = \pm 2$, alle mit VZW.

2. Alternativ kann man durch Probieren eine Nullstelle suchen. Wegen $f(1) = -18$ ist $x = 1$ keine Nullstelle, aber wegen $f(-1) = 0$ liegt bei $x = -1$ eine Nullstelle und der Linearfaktor $(x+1)$ muss enthalten sein. Eine Polynomdivision und das 3. Binom liefern

$$(x^3 + x^2 - 4\,x - 4) : (x+1) = x^2 - 4 = (x+2)\,(x-2)$$

was ebenfalls zur obigen Produktform führt.

3. Für die nähere Umgebung von $x = -2$ gilt

$$f_{-2}(x) = 3\,(-2+1)\,(x+2)\,(-2-2) = 12\,(x+2)$$

d.h. f verhält sich dort wie die Gerade $g(x) = 12\,(x+2)$.

4. Für die nähere Umgebung von $x = -1$ gilt

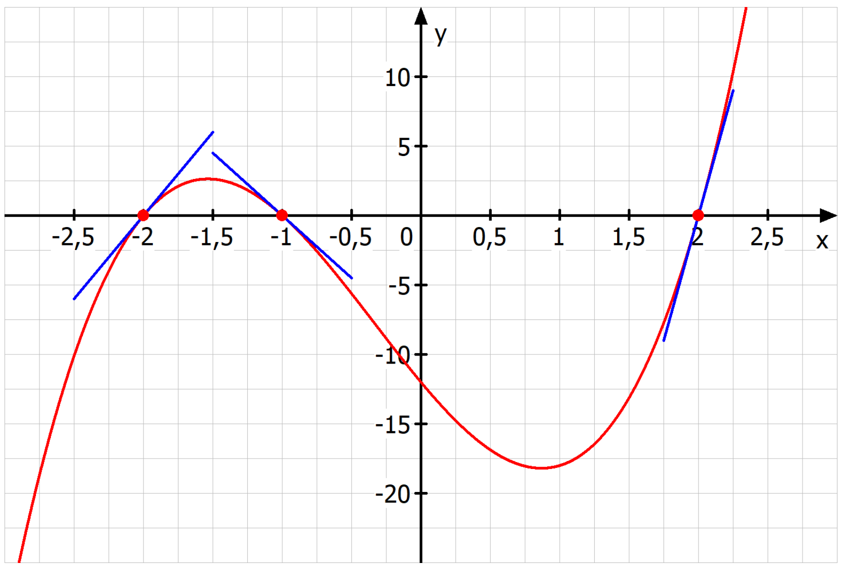
$$f_{-1}(x) = 3\,(x+1)\,(-1+2)\,(-1-2) = -9\,(x+1)$$

d.h. f verhält sich dort wie die Gerade $h(x) = -9\,(x+1)$.

5. Für die nähere Umgebung von $x = 2$ gilt

$$f_2(x) = 3\,(2+1)\,(2+2)\,(x-2) = 36\,(x-2)$$

d.h. f verhält sich dort wie die Gerade $i(x) = 36\,(x-2)$



Die Geraden g, h und i sind in den jeweiligen Nullstellen Tangenten an den Graphen von f.