Gegeben sind drei Polynomfunktionen f, g und h (siehe FS 8.6) mit

$$f(x) = x^2 + 6\,x + 5$$
$$g(x) = -\,x^2 + 2\,x - 1$$
$$h(x) = -\,x^3 + 9\,x^2 - 27\,x + 27$$

Gesucht sind für alle drei Funktionen die Produktform, sowie für f und g die Scheitelpunktform. Ausserdem sind für alle drei Funktionen die Position und Art der Nullstelle(n) zu bestimmen.

---

1. Für f gilt mit dem 1. Binom und quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6\,x + 5 \\ &= x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 5 \\ &= x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

und mit Linearfaktorzerlegung

$$f(x) = (x+5)^1\,(x+1)^1$$

d.h. die Nullstellen liegen bei $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$, und wegen den Exponenten 1 sind es solche mit VZW.

2. Für g gilt mit dem 2. Binom

$$\begin{aligned} g(x) &= -\,x^2 + 2\,x - 1 \\ &= -\,(x^2 - 2\,x + 1) \\ &= -\,(x-1)^2 \end{aligned}$$

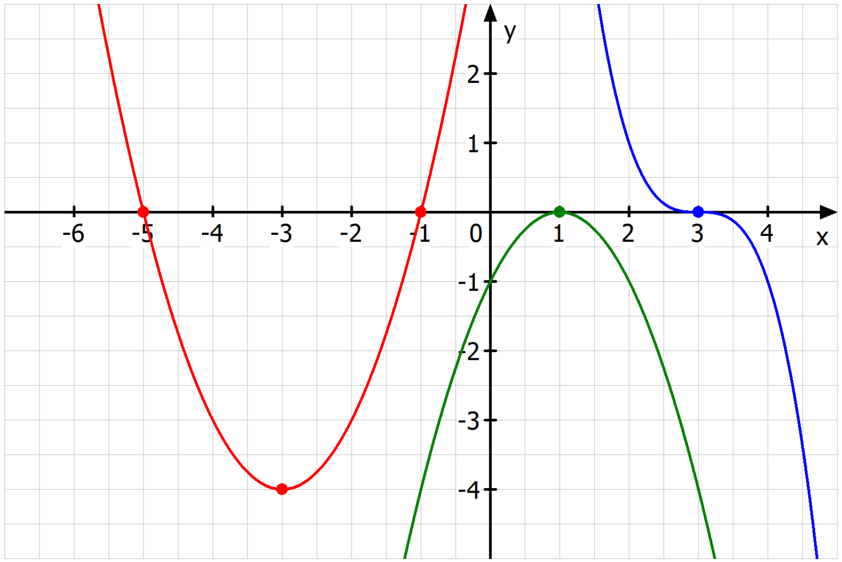
d.h. die Nullstelle liegt bei $x = 1$, und wegen dem Exponenten 2 ist es eine ohne VZW.

3. Für h gilt mit dem Pascalschen Dreieck

$$\begin{aligned} h(x) &= -\,x^3 + 9\,x^2 - 27\,x + 27 \\ &= -\,(x^3 - 9\,x^2 + 27\,x - 27) \\ &= -\,(x^3 - 3\,x^2\,3^1 + 3\,x^1\,3^2 - 3^3) \\ &= -\,(x-3)^3 \end{aligned}$$

d.h. die Nullstelle liegt bei $x = 3$, und wegen dem Exponenten 3 ist es eine mit VZW.

4. Für ungerade Exponenten sind es immer Nullstellen mit VZW, für gerade Exponenten solche ohne VZW.



Ist der Exponent 1, so wird die x-Achse in einem Winkel ungleich Null geschnitten, für Exponenten grösser als 1 verläuft die Kurve an der Nullstelle waagrecht.