Gegeben ist eine Wurzelfunktion f, vergleiche FS 8.3.3, mit

$$f(x) = \sqrt{x+4} - 3$$

Gesucht ist eine Wertetabelle für $x \in \{-4\,;0\,;5\,;12\}$ und daraus abgeleitet der Definitions- und Wertebereich, sowie der Graph. Ausserdem soll die Umkehrfunktion f^{-1} berechnet werden, ausgesprochen „f invers“. Man überprüfe, ob das Einsetzen der y-Werte aus der Wertetabelle in die Umkehrfunktion wieder deren x-Werte ergibt.

---

1. Einsetzen der x-Werte ergibt die Wertetabelle

x	-4	0	5	12
$y = f(x)$	-3	-1	0	1

2. Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{\geq -4}$ und Werteber. $W_f = \mathbb{R}^{\geq -3}$, siehe rote Kurve.

3. Die Zuordnungsvorschrift mit y anstatt $f(x)$ schreiben ergibt

$$f(x) = \sqrt{x+4} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{x+4} - 3$$

und unter Berücksichtigung von $y \in \mathbb{R}^{\geq -3}$ nach x umstellen

$$\sqrt{x+4} = y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4 = (y+3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = (y+3)^2 - 4$$

Sobald die Zuordnungsvorschrift nach x umgestellt ist, werden x und y vertauscht und anstatt y wird wieder $f^{-1}(x)$ geschrieben

$$y = (x+3)^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 4$$

4. Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^{\geq -3}$ und Werteber. $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^{\geq -4}$, siehe blaue Kurve.

5. Setzt man z.B. $x = 1$ in die Umkehrfunktion f^{-1} ein, so erhält man

$$f^{-1}(1) = (1+3)^2 - 4 = 12$$

womit f^{-1} genau die „umgekehrte“ Wirkung von f hat, wo man

$$f(12) = \sqrt{12+4} - 3 = 1$$

erhält. Die obige Wertetabelle wird durch f^{-1} „umgekehrt“

x	-3	-1	0	1
$y = f^{-1}(x)$	-4	0	5	12

6. Die Graphen von f und f^{-1} spiegeln sich an der Identität $y = x$, d.h. an der grünen Gerade mit Steigung $m = 1$, bzw. Steigungswinkel $\alpha = 45^\circ$, wobei gleiche Skalierung der Achsen vorausgesetz wird.