Gegeben ist eine gebrochenlineare Funktion f, vergleiche FS 8.8, mit

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

Gesucht ist eine Wertetabelle für $x \in \{-5; -4; -1; 0; 1\}$ und daraus abgeleitet der Definitions- und Wertebereich, sowie der Graph. Ausserdem soll die Umkehrfunktion f^{-1} berechnet werden, ausgesprochen „f invers". Man überprüfe, ob das Einsetzen der y-Werte aus der Wertetabelle in die Umkehrfunktion wieder deren x-Werte ergibt.

---

1. Einsetzen der x-Werte ergibt die Wertetabelle

x	-5	-4	-1	0	1
$y = f(x)$	2	2.5	-2	-0.5	0

2. Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (exkl. Polstelle) und Werteber. $W_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (exkl. Asymptote $a(x) = 1$), siehe rote Kurve.

3. Die Zuordnungsvorschrift mit y anstatt $f(x)$ schreiben ergibt

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x-1}{x+2}$$

und nach x umstellen

$$y\,x - x = -2\,y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(y-1) = -2\,y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\,y+1}{1-y}$$

Sobald die Zuordnungsvorschrift nach x umgestellt ist, werden x und y vertauscht und anstatt y wird wieder $f^{-1}(x)$ geschrieben

$$y = \frac{2\,x+1}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2\,x+1}{1-x}$$

4. Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (exkl. Polstelle) und Werteber. $W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (exkl. Asymptote $a(x) = -2$), siehe blaue Kurve.

5. Setzt man z.B. $x = 2$ in die Umkehrfunktion f^{-1} ein, so erhält man

$$f^{-1}(2) = (2 \cdot 2 + 1)/(1-2) = -5$$

womit f^{-1} genau die „umgekehrte" Wirkung von f hat, wo man

$$f(-5) = (-5-1)/(-5+2) = 2$$

erhält. Die obige Wertetabelle wird durch f^{-1} „umgekehrt"

x	2	2.5	-2	-0.5	0
$y = f^{-1}(x)$	-5	-4	-1	0	1

6. Die Graphen von f und f^{-1} spiegeln sich an der Identität $y = x$, d.h. an der grünen Gerade mit Steigung $m = 1$, bzw. Steigungswinkel $\alpha = 45°$, wobei gleiche Skalierung der Achsen vorausgesetz wird.