Gegeben sind diverse Funktionen f mit

1. $f(x) = \frac{6}{7}\left(x - \frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4}$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$
3. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} - \frac{9}{2}$
4. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$
5. $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

Mit dem CAS-Befehl

```
Plot[Sqrt[x + 2] - 1, {x, -3, 7}]
```

kann man z.B. die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

auf dem Intervall $[-3\,;7]$ zeichnen lassen und mit

```
Solve[Sqrt[x + 2] - 1 == 0, x]
```

kann man die Gleichung

$$\sqrt{x+2} - 1 = 0$$

lösen, d.h. die Nullstelle von f bestimmen.

Eine Kurve bzw. Funktion zu diskutieren heisst alle wichtigen Eigenschafte bestimmen. Für eine quadratische Funktion z.B. sind dies der Scheitelpunkt S, der y-Achsenabschnitt, die Nullstellen und der Definitionsbereich D sowie der Wertebereich W. Wenn man alle diese Eigenschaften berechnet hat, zeichnet man den Graph $G(f)$.

In den Lösungen steht die Einheit $1H$ für ein Häuschen, bzw. ein Karo.

Alle Funktionen sind von der Form

$$f(x) = d \cdot g(x+a) + b$$

mit einer Grundfunktion g, welche mit d vertikal gestreckt oder gestaucht, sowie mit a horizontal und mit b vertikal verschoben wird.

---

1. a) Die Grundfunktion g ist mit

$$g(x) = x$$

die Identität, vergleiche FS 8.1.

b) Für jede lineare Funktion ist $D = \mathbb{R}$ und wegen dem Steigungsfaktor

$$m = 6/7 \neq 0$$

gilt $W = \mathbb{R}$.

c) Für den y-Achsenabschnitt gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{6}{7}\left(0 - \frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{6}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} = -0.75 \end{aligned}$$

d) Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{6}{7}\left(x - \frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = -\frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\frac{7}{8} + \frac{7}{4} = \frac{7}{8} = 0.875 \end{aligned}$$

gibt es eine Nullstelle bei $x = 0.875$.

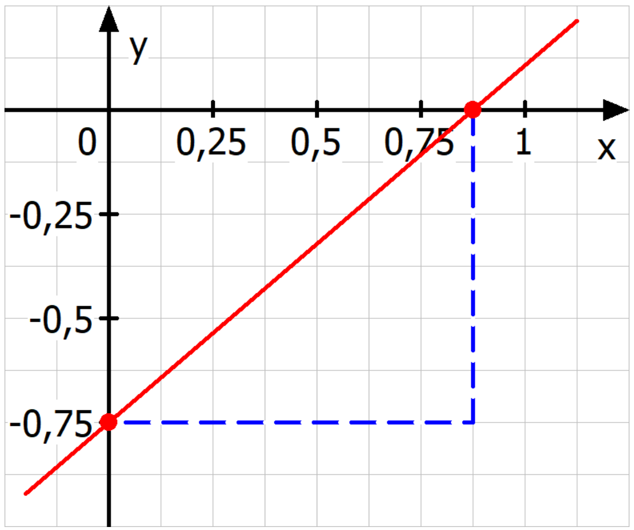
e) Wegen der Nullstelle bei $x = 7/8$ bietet sich als Skalierung $8H = 1E$ an und ausgehend vom Punkt

$$f(0) = -\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$$

kann man das Steigungsdreieck mit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{7} = \frac{6H}{7H}$$

eintragen und erhält dadurch einen zweiten Punkt, wobei es Zufall ist, dass dieser die Nullstelle trifft.



$f(x) = \frac{6}{7}\left(x - \frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4}$

2. a) Die Grundfunktion g ist mit

$$g(x) = x^2$$

die Normalparabel, vergleiche FS 8.4.

b) Für jede quadratische Funktion ist $D = \mathbb{R}$ und wegen dem Streckungsfaktor und dem Scheitelpunkt

$$a = -0.5 < 0 \quad \text{bzw.} \quad y_s = 2$$

gilt $W =]-\infty; 2]$.

c) Für den y-Achsenabschnitt gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 \\ &= -\frac{9}{8} + \frac{16}{8} = \frac{7}{8} = 0.875 \end{aligned}$$

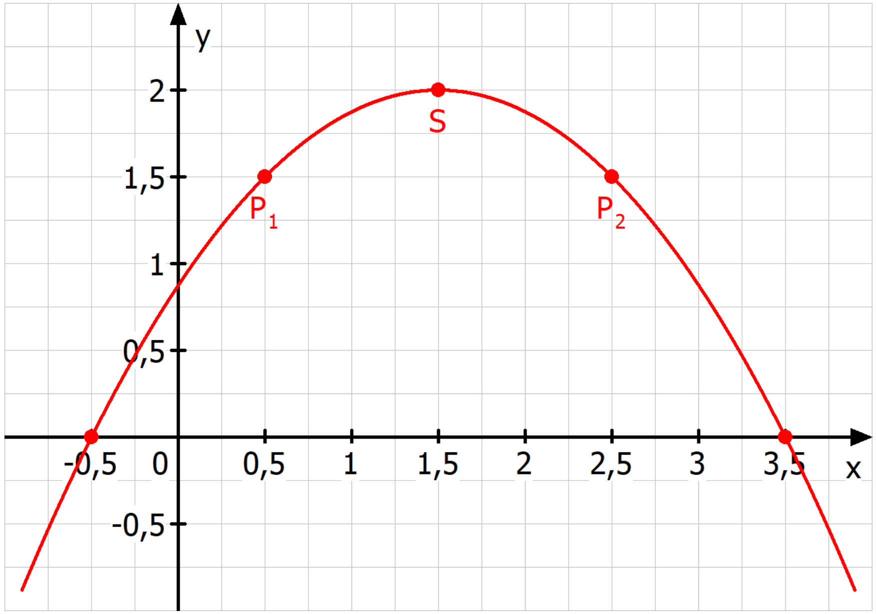
d) Wegen

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -2 \cdot (-2) = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} - \frac{3}{2} = \pm 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm 2 \end{aligned}$$

gibt es zwei Nullstellen bei $x_1 = -0.5$ und $x_2 = 3.5$.

e) Wegen dem y-Achsenabschnitt $f(0) = 7/8$ bietet sich als Skalierung $4H = 1E$ oder $8H = 1E$ an.

Ausgehend vom Scheitelpunkt S kann man den Streckungsfaktor $a = -0.5$ eintragen, was die Punkte P_1 und P_2 ergibt, siehe Zeichnung.



$$f(x) = -\tfrac{1}{2}\,\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + 2$$

3. a) Die Grundfunktion g ist mit

$$g(x) = \sqrt{x}$$

eine Wurzelfunktion, vergleiche FS 8.3.3.

b) Es gilt $D = [-1\,;\,\infty[$ wegen

$$x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$$

und $W = [-4.5\,;\,\infty[$ wegen

$$\frac{3}{2}\sqrt{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt{x+1} - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}$$

d.h. der Graph $G(f)$ startet im Punkt $P(-1\,;\,-4.5)$.

c) Für den y-Achsenabschnitt gilt

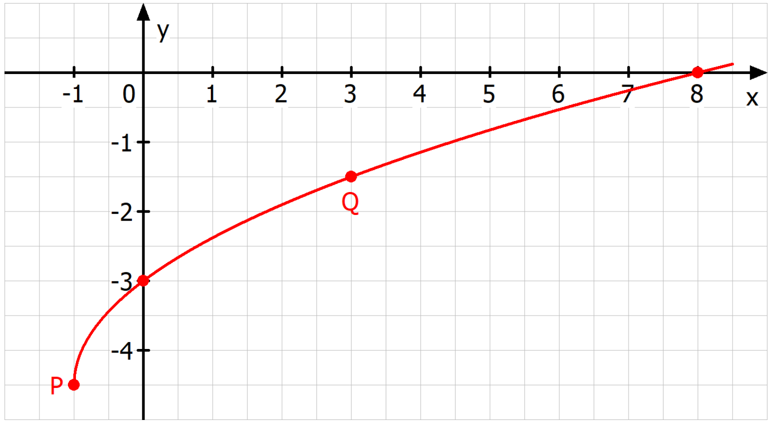
$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{3}{2}\sqrt{0+1} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -3 \end{aligned}$$

d) Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}\sqrt{x+1} - \frac{9}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x+1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 1 = 9 \end{aligned}$$

gibt es eine Nullstelle bei $x = 8$.

e) Mit $f(3) = -1.5$ erhält man einen weiteren Punkt $Q(3\,;\,-1.5)$ zum einzeichnen.



$$f(x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{x+1} - \tfrac{9}{2}$$

4. a) Die Grundfunktion g ist mit

$$g(x) = \sin x$$

eine Sinusfunktion, vergleiche FS 8.11.

b) Für jede Sinusfunktion ist $D = \mathbb{R}$ und wegen

$$\begin{aligned} -1 \leq & \ \sin(\ldots) & \leq 1 \quad & \Leftrightarrow \\ -1.5 \leq & \ 1.5 \sin(\ldots) & \leq 1.5 \quad & \Leftrightarrow \\ -3.5 \leq & \ 1.5 \sin(\ldots) - 2 & \leq -0.5 & \end{aligned}$$

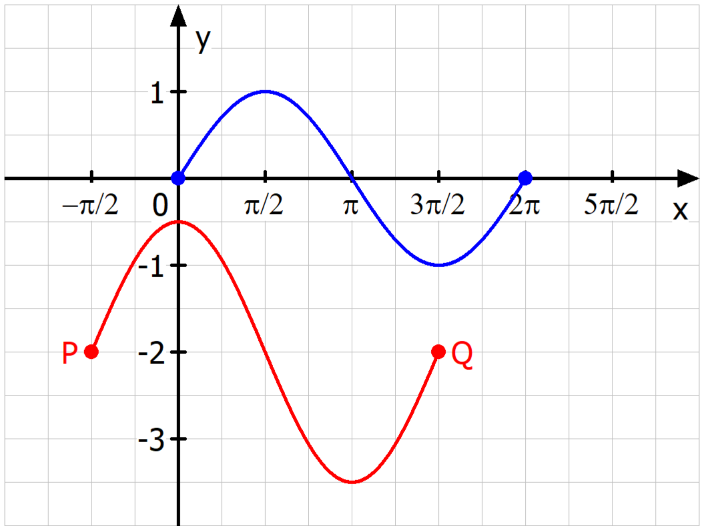
gilt $W = [-3.5\,;\,-0.5]$.

c) Für den y-Achsenabschnitt gilt

$$f(0) = \frac{3}{2} \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \frac{3}{2} \cdot 1 - 2 = -\frac{1}{2}$$

d) Es gibt keine Nullstellen wegen $0 \notin W$.

e) Anfangs- und Endpunkt der blauen Referenzkurve werden in die Punkte P bzw. Q verschoben, d.h. um $\pi/2$ nach links und um 2 nach unten, siehe Zuordnungsvorschrift und Zeichnung.



$f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

5. a) Die Grundfunktion g ist mit

$$g(x) = \cos x$$

eine Cosinusfunktion, vergleiche FS 8.11.

b) Für jede Cosinusfunktion ist $D = \mathbb{R}$ und wegen

$$\begin{aligned} -1 \leq & \ \cos(\ldots) & \leq 1 \quad & \Leftrightarrow \\ -0.5 \leq & \ 0.5 \cos(\ldots) & \leq 0.5 \quad & \Leftrightarrow \\ -2 \leq & \ 0.5 \cos(\ldots) - 1.5 & \leq -1 & \end{aligned}$$

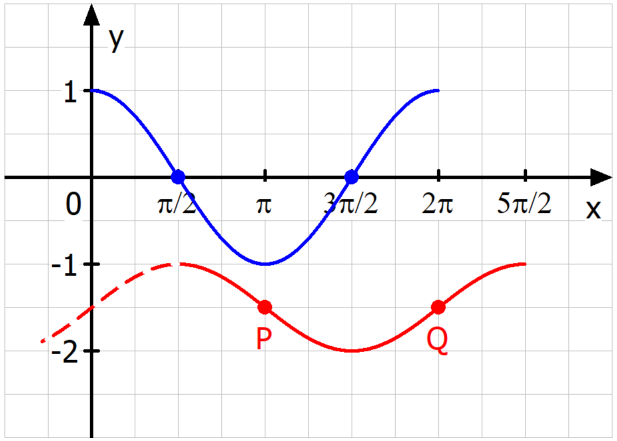
gilt $W = [-2\,;\,-1]$.

c) Für den y-Achsenabschnitt gilt

$$f(0) = \frac{1}{2} \cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

d) Es gibt keine Nullstellen wegen $0 \notin W$.

e) Die Nullstellen der blauen Referenzkurve werden in die Punkte P bzw. Q verschoben, d.h. um $\pi/2$ nach rechts und um 1.5 nach unten, siehe Zuordnungsvorschrift und Zeichnung.



$f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}$