Gegeben ist für eine Funktion f die Zuordnungsvorschrift (ZV)

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

wobei $a \neq 0$ gilt und es sollen folgende Fragen beantwortet werden.

1. Welcher Funktionstyp wird dadurch beschrieben und welche Formen gibt es für diesen? Warum gibt es verschiedene Formen und was haben diese gemeinsam?
2. Welche Werte können die Parameter a, b und c annehmen?
3. Wie nennt man eine quadratische Funktion wenn man in der allgemeinen Form den Parameter b oder c auf Null setzt?
4. Welche Eigenschaften hat die „reinquadratische Sonderform“
$$f(x) = a\,x^2 + c$$
5. Welche Eigenschaften hat die „gemischtquadratische Sonderform“
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x$$
6. Diskutiere die Funktionen mit den folgenden ZV

a)	$f(x) = 2\,x^2 + 5\,x$	b)	$f(x) = 0.5\,x^2 - 2.5$
c)	$f(x) = -0.5\,x^2 + 4\,x$	d)	$f(x) = 0.25\,x^2 + 0.75$
e)	$f(x) = 0.25\,x^2 - x$	f)	$f(x) = -2\,x^2 - 0.25$

---

1. Es ist die allgemeine Form
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$
einer quadratischen Funktion mit dem Streckungsfaktor a und dem y-Achsenabschnitt c, vergleiche FS 8.4. Man kann eine solche auch in der Scheitelpunktform
$$f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$
mit dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$, oder – falls Nullstellen vorhanden sind – in der Produktform
$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$
mit den beiden Nullstellen x_1 und x_2 darstellen.

   Jede Form hat ihre Vorteile, denn bei der allgemeinen Form kann man den y-Achsenabschnitt ablesen, bei der Scheitelpunktform die Koordinaten des Scheitelpunktes und bei der Produktform die Nullstellen.

   Allen drei Formen gemeinsam ist der Streckungsfaktor a, welcher die Form der Kurve, d.h. nach oben oder unten offen, sowie gestreckt oder gestaucht, beschreibt.
2. Für die Parameter gilt
$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad b, c \in \mathbb{R}$$
d.h. sie können jeden Wert annehmen mit Ausnahme von a, welcher nicht Null sein darf.
3. Mit $b = 0$ erhält man die „reinquadratische Sonderform“
$$f(x) = a\,x^2 + 0 \cdot x + c = a\,x^2 + c$$
und mit $c = 0$ die „gemischtquadratische Sonderform“
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + 0 = a\,x^2 + b\,x$$
vergleiche FS 8.4.

4. Die „reinquadratische Sonderform“, d.h. f mit

$$f(x) = a\,x^2 + c$$

hat folgende Eigenschaften.

a) Der Graph $G(f)$ ist symmetrisch bez. y-Achse, denn wegen

$$a\,x^2 + c = a\,(-x)^2 + c$$

gilt

$$f(x) = f(-x)$$

für alle $x \in D = \mathbb{R}$, vergleiche FS 9.2.1.

b) Falls vorhanden, hat f wegen

$$f(x) = a\,x^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

zwei Nullstellen, welche sich nur im Vorzeichen unterscheiden, was der Aussage zur Symmetrie bez. y-Achse entspricht.

c) Der Scheitelpunkt liegt immer bei

$$S(0\,;\,c)$$

denn mit der Scheitelpunktform gilt

$$f(x) = a\,(x-0)^2 + c = a\,x^2 + c$$

und damit $x_s = 0$ sowie $y_s = f(0) = c$.

5. Die „gemischtquadratische Sonderform“, d.h. f mit

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x$$

hat folgende Eigenschaften.

a) Der Graph $G(f)$ ist nicht symmetrisch bez. y-Achse, denn wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \\ &= a + b \\ &\neq a - b \\ &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = f(-1) \end{aligned}$$

gilt

$$f(x) = f(-x)$$

nicht für alle $x \in D = \mathbb{R}$, vergleiche FS 9.2.1.

Der Graph $G(f)$ ist auch nicht symmetrisch bez. Ursprung des Koordinatensystems, denn wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \\ &= a + b \\ &\neq -a + b \\ &= -(a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)) = -f(-1) \end{aligned}$$

gilt

$$f(x) = -f(-x)$$

nicht für alle $x \in D = \mathbb{R}$, vergleiche FS 9.2.2.

b) Wegen

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x = a\,x\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$$

hat f immer die zwei verschiedenen Nullstellen

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

was der Aussage zur fehlenden Symmetrie entspricht.

c) Weil die „gemischtquadratische Sonderform“ zwei verschiedene Nullstellen hat, kann man die Koordinaten

$$S\left(-\frac{b}{2\,a}\,;\,-\frac{b^2}{4\,a}\right)$$

des Scheitelpunktes auf verschiedene Art bestimmen.

1. Variante: die Koordinate x_s des Scheitelpunktes liegt genau in der Mitte der Nullstellen, d.h. mit dem arithmetischen Mittel gilt

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - b/a}{2} = -\frac{b}{2\,a}$$

und eingesetzt in die faktorisierte Zuordnungsvorschrift

$$y_s = f(x_s) = a\left(-\frac{b}{2\,a}\right)\left(-\frac{b}{2\,a} + \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2\,a}\right) = -\frac{b^2}{4\,a}$$

2. Variante: eine quadratische Ergänzung mit dem ersten Binom gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x^2 + b\,x \\ &= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2\,a}\,x\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2\,a}\,x + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\,a} \end{aligned}$$

ergibt mit

$$x_s = -\frac{b}{2\,a} \quad \text{und} \quad y_s = -\frac{b^2}{4\,a}$$

dasselbe Resultat.

6. Eine Funktion diskutieren heisst alle wichtigen Eigenschaften wie z.B. die Schnittstellen mit den beiden Achsen sowie den Scheitelpunkt rechnerisch zu bestimmen, um daraus den Graphen zeichnen zu können.

a) Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x^2 + 5\,x \\ &= 2\,x\,(x + 2.5) = 0 \end{aligned}$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

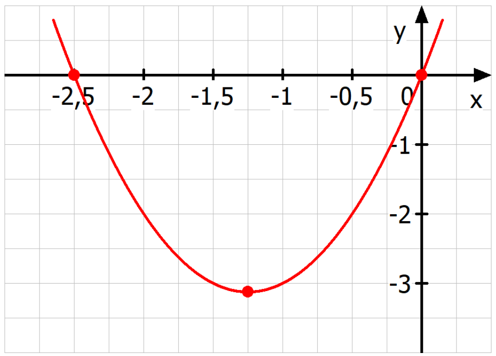
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -2.5$$

wobei x_1 zugleich der y-Achsenabschnitt ist.

Mit dem 1. Binom und $b = 5/4$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x^2 + 5\,x \\ &= 2\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{4}\,x + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) - 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S\,(-1.25\,;\,-3.125)$.



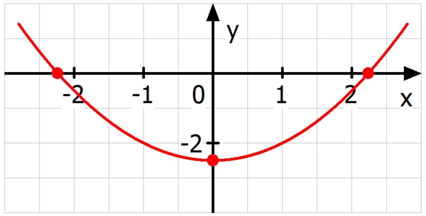
b) Wegen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0.5\,x^2 - 2.5 \\
&= 0.5\,(x^2 - 5) \\
&= 0.5\,(x + \sqrt{5})\,(x - \sqrt{5}) = 0
\end{aligned}
$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.24$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0\,;\,-2.5)$ und dies ist zugleich der y-Achsenabschnitt.



c) Wegen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -0.5\,x^2 + 4\,x \\
&= -0.5\,x\,(x - 8) = 0
\end{aligned}
$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

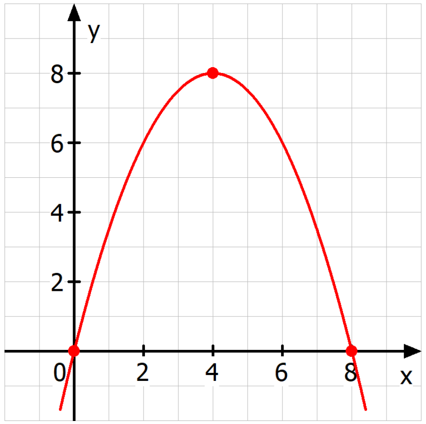
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 8$$

wobei x_1 zugleich der y-Achsenabschnitt ist.

Mit dem 2. Binom und $b = 4$ gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -0.5\,x^2 + 4\,x \\
&= -0.5\,\left(x^2 - 2 \cdot 4\,x + 4^2\right) + 0.5 \cdot 4^2 \\
&= -0.5\,(x - 4)^2 + 8
\end{aligned}
$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(4\,;\,8)$.



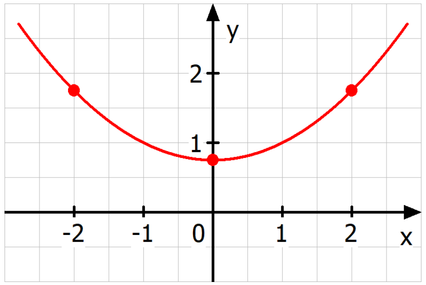
d) Wegen

$$f(x) = 0.25\,x^2 + 0.75 \geq 0.75 > 0$$

hat die Funktion keine Nullstelle und um den Graphen besser zeichnen zu können, kann man zwei weitere Punkte berechnen, z.B.

$$f(\pm 2) = 0.25 \cdot (\pm 2)^2 + 0.75 = 1.75$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0\,;\,0.75)$ und dies ist zugleich der y-Achsenabschnitt.



e) Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25\,x^2 - x \\ &= 0.25\,x\,(x-4) = 0 \end{aligned}$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

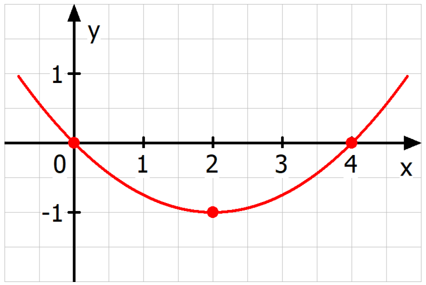
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

wobei x_1 zugleich der y-Achsenabschnitt ist.

Mit dem 2. Binom und $b = 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25\,x^2 - x \\ &= 0.25\,\left(x^2 - 2\cdot 2\,x + 2^2\right) - 0.25\cdot 2^2 \\ &= 0.25\,(x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(2\,;\,-1)$.



f) Wegen

$$f(x) = -2\,x^2 - 0.25 \leq -0.25 < 0$$

hat die Funktion keine Nullstelle und um den Graphen besser zeichnen zu können, kann man zwei weitere Punkte berechnen, z.B.

$$f(\pm 1) = -2\cdot(\pm 1)^2 - 0.25 = -2.25$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0\,;\,-0.25)$ und dies ist zugleich der y-Achsenabschnitt.