Gegeben sind quadratische Funktionen f, vergleiche FS 8.4, mit

1. $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6$
2. $f(x) = 0.5\,x^2 + 3\,x + 2.5$
3. $f(x) = -2\,x^2 + 16\,x - 24$
4. $f(x) = 0.25\,x^2 + x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 3\,x + 1$
6. $f(x) = -x^2 + 5\,x - 1$

Gesucht ist die Kurvendiskussion, wobei das CAS (Computer-Algebra-System) Mathematica auf www.wolframalpha.com benutzt werden kann.

Mit dem CAS-Befehl

```
Solve[2 x^2 - 4 x - 6 == 0, x]
```

kann man die Gleichung

$$2\,x^2 - 4\,x - 6 = 0$$

lösen, d.h. die Nullstellen von f bestimmen und mit

```
Plot[2 x^2 - 4 x - 6, {x, -5, 5}]
```

kann man die Funktion f mit

$$f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6$$

auf dem Intervall $[-5\,;\,5]$ zeichnen lassen.

Eine Kurve bzw. Funktion zu diskutieren heisst alle wichtigen Eigenschafte bestimmen. Für eine quadratische Funktion sind dies der Scheitelpunkt S, der y-Achsenabschnitt, die Nullstellen und der Definitionsbereich D sowie der Wertebereich W. Wenn man alle diese Eigenschaften berechnet hat, zeichnet man den Graph $G(f)$.

1. a) Mit dem 2. Binom und $b = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x^2 - 2\cdot 1\cdot x\right) - 6 \\ &= 2\left(x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2\right) - 2\cdot 1^2 - 6 \\ &= 2\,(x-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(1\,;\,-8)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = 2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 - 6 = -6$$

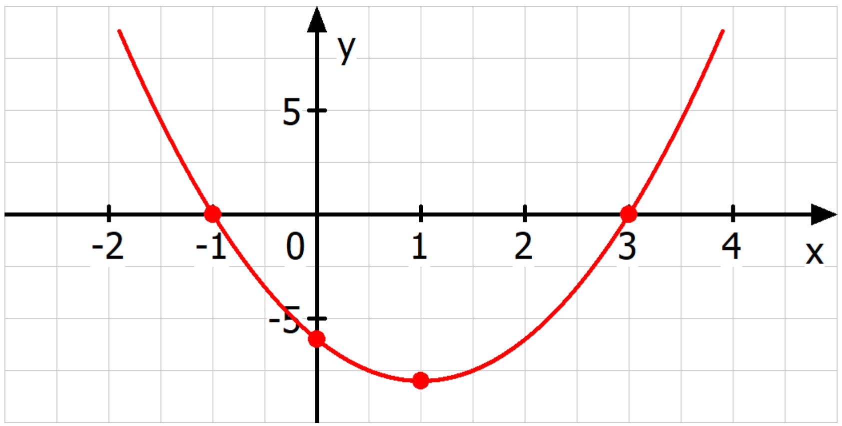
c) Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x^2 - 2\,x - 3\right) \\ &= 2\,(x+1)\,(x-3) = 0 \end{aligned}$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a > 0 \quad \wedge \quad y_s = -8 \quad \Rightarrow \quad W = [-8\,;\,\infty[$$



2. a) Mit dem 1. Binom und $b = 3$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5\,\left(x^2 + 2\cdot 3\cdot x\right) + 2.5 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2\right) - 0.5\cdot 3^2 + 2.5 \\ &= 0.5\,(x+3)^2 - 2 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(-3\,;\,-2)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = 0.5\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 2.5 = 2.5$$

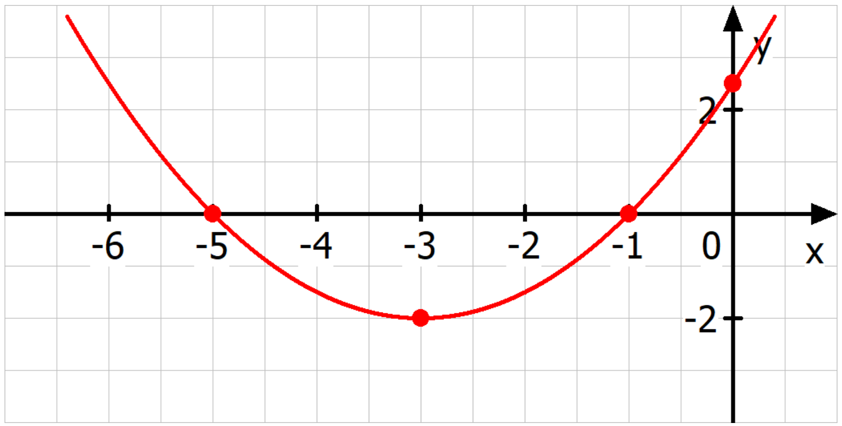
c) Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5\,\left(x^2 + 6\,x + 5\right) \\ &= 0.5\,(x+5)\,(x+1) = 0 \end{aligned}$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a > 0 \quad \wedge \quad y_s = -2 \quad \Rightarrow \quad W = [-2\,;\,\infty[$$



3. a) Mit dem 2. Binom und $b = 4$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,\left(x^2 - 2\cdot 4\cdot x\right) - 24 \\ &= -2\,\left(x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 4^2\right) + 2\cdot 4^2 - 24 \\ &= -2\,(x-4)^2 + 8 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(4\,;\,8)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = -2\cdot 0^2 + 16\cdot 0 - 24 = -24$$

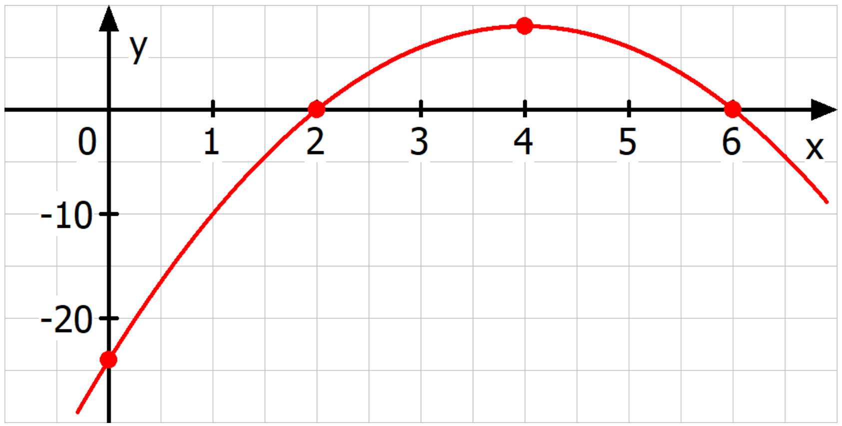
c) Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,\left(x^2 - 8\,x + 12\right) \\ &= -2\,(x-2)\,(x-6) = 0 \end{aligned}$$

und damit die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a < 0 \quad \wedge \quad y_s = 8 \quad \Rightarrow \quad W =]-\infty\,;\,8]$$



4. a) Mit dem 1. Binom und $b = 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25\left(x^2 + 2\cdot 2\cdot x\right) - 3 \\ &= 0.25\left(x^2 + 2\cdot 2\cdot x + 2^2\right) - 0.25\cdot 2^2 - 3 \\ &= 0.25\,(x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(-2\,;\,-4)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = 0.25\cdot 0^2 + 0 - 3 = -3$$

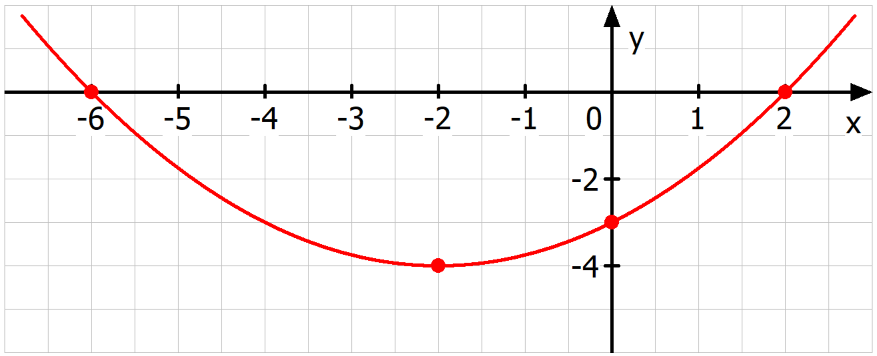
c) Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25\left(x^2 + 4\,x - 12\right) \\ &= 0.25\,(x+6)\,(x-2) = 0 \end{aligned}$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a > 0 \quad \wedge \quad y_s = -4 \quad \Rightarrow \quad W = [-4\,;\,\infty[$$



5. a) Mit dem 2. Binom und $b = 3/2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + 1 \\ &= x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(1.5\,;\,-1.25)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 1 = 1$$

c) Die Diskriminante

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4\,a\,c \\ &= (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

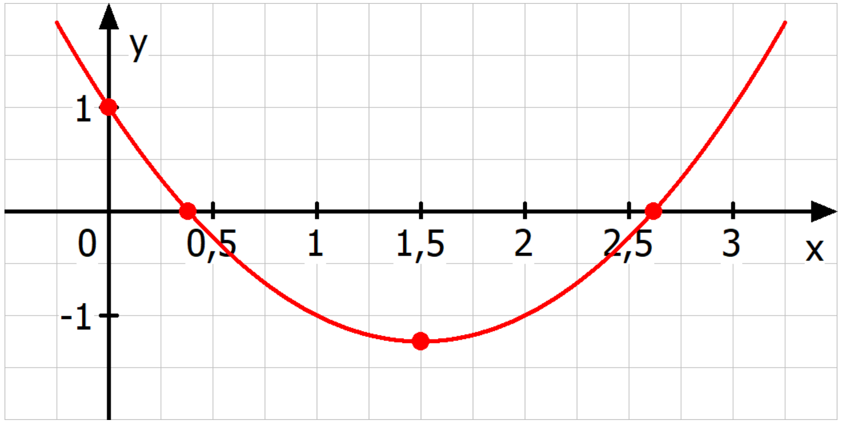
und die abc-Formel

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} \\ &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.5 \pm 1.12 \end{aligned}$$

liefern die Nullstellen bei $x_1 \approx 0.38$ sowie $x_2 \approx 2.62$. Diese Resultate zeigen, dass eine Linearfaktorzerlegung nicht möglich bzw. zu schwierig ist.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a > 0 \quad \wedge \quad y_s = -1.25 \quad \Rightarrow \quad W = [\,-1.25\,;\,\infty[$$



6. a) Mit dem 2. Binom und $b = 5/2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -1\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x\right) - 1 \\ &= -1\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 1\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 \\ &= -1\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - \frac{4}{4} \\ &= -1\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S(2.5\,;\,5.25)$.

b) Mit $x = 0$ gilt für den y-Achsenabschnitt

$$f(0) = -0^2 + 5\cdot 0 - 1 = -1$$

c) Die Diskriminante

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4\,a\,c \\ &= 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = 21 \end{aligned}$$

und die abc-Formel

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2.5 \pm 2.29 \end{aligned}$$

liefern die Nullstellen bei $x_1 \approx 0.21$ sowie $x_2 \approx 4.79$. Diese Resultate zeigen, dass eine Linearfaktorzerlegung nicht möglich bzw. zu schwierig ist.

d) Für jede quadratische Funktion gilt $D = \mathbb{R}$ und mit dem Streckungsfaktor a sowie dem Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$

$$a < 0 \quad \wedge \quad y_s = 5.25 \quad \Rightarrow \quad W =]-\infty\,;\,5.25]$$