Gegeben ist für eine Funktion f die Zuordnungsvorschrift (ZV)

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

wobei $a \neq 0$ gilt und es sollen folgende Fragen beantwortet werden.

1. Welcher Funktionstyp wird dadurch beschrieben?
2. Wie nennt man den Parameter a und was beschreibt er?
3. Wie nennt man den Parameter c und was beschreibt er?
4. Wie berechnet man die Nullstelle(n) von f?
5. Wie viele Nullstellen kann f haben?
6. Welche Werte kann a annehmen?
7. Welche Werte kann c annehmen?
8. Welche Werte kann b annehmen?
9. Gibt es neben der allg. Form noch eine andere? Welche?
10. Wie lauten der Definitionsbereich D?
11. Wie lauten der Wertebereich W?
12. Welche Parabel wird durch $b = c = 0$ beschrieben, falls $a = \pm 1$ ist?

---

1. Die Zuordnungsvorschrift

   $$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

   beschreibt eine quadratische Funktion, genauer deren allgemeine Form, vergleiche FS 8.4.

   Es gibt zwei weitere Formen:

   a) Man kann jede quadr. Funktion auch in der Scheitelpunktform

   $$y = f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$

   mit dem Scheitelpunkt

   $$S(x_s\,;\,y_s)$$

   darstellen.

   b) Manche quadr. Funktion kann man auch in der Produktform

   $$y = f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

   mit den beiden Nullstellen

   $$x_1 \quad \text{und} \quad x_2$$

   darstellen.

2. Der Parameter a ist der Streckungsfaktor und er beschreibt die Form der Kurve, d.h. ob sie gestreckt oder gestaucht ist, nach oben oder nach unten offen.

3. Der Parameter c ist der y-Achsenabschnitt, auch Konstantglied oder Offset genannt, und wegen

   $$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

   beschreibt er, wo der Graph von f die y-Achse schneidet.

4. Die Nullstellen beschreiben, wo der Graph von f die x-Achse schneidet. Es gilt dort zwingend $y = 0$ und damit

   $$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

   d.h. es muss eine quadratische Gleichung gelöst werden.

5. Die quadratische Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

hat entweder keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen, und es ist die Diskriminante

$$D = b^2 - 4\,a\,c$$

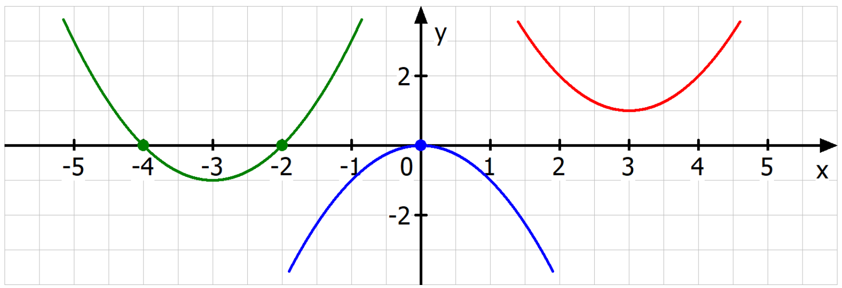
welche darüber entscheidet:

- $D < 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung
- $D = 0 \quad \Rightarrow$ genau eine Lösung
- $D > 0 \quad \Rightarrow$ zwei verschiedene Lösungen

Falls $D \geq 0$ gilt, kann man die Lösung(en) mit der *abc*-Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a}$$

berechnen und dies sind gerade die Nullstellen der Funktion f, vergleiche die Beispiele in der Zeichnung.



- $D < 0 \quad \Rightarrow$ keine Nullstelle (rote Parabel)
- $D = 0 \quad \Rightarrow$ genau eine Nullstelle (blaue Parabel)
- $D > 0 \quad \Rightarrow$ zwei verschiedene Nullstellen (grüne Parabel)

6. Es gilt $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. der Parameter a kann mit Ausnahme von Null jeden Wert annehmen. Für den Streckungsfaktor bzw. die Parabel gilt

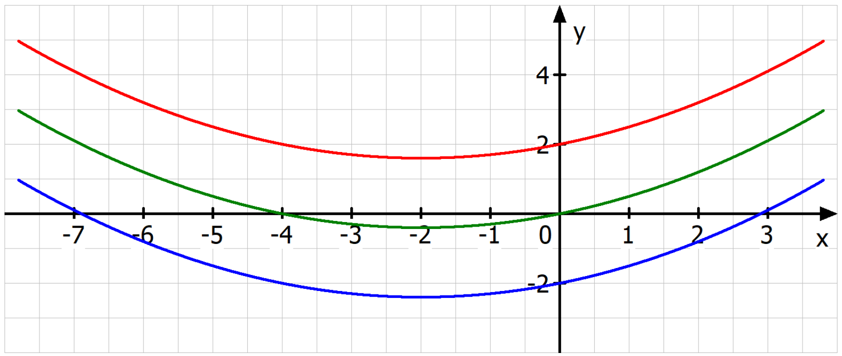
$$\begin{aligned} a > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach oben offen und gestreckt} \\ 1 > a > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach oben offen und gestaucht} \\ -1 < a < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach unten offen und gestaucht} \\ a < -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach unten offen und gestreckt} \end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\begin{aligned} a > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach oben offen} \\ a < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach unten offen} \\ |a| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{gestreckt} \\ |a| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{gestaucht} \end{aligned}$$

7. Es gilt $c \in \mathbb{R}$, d.h. der Parameter c kann jeden Wert annehmen und er ist für die vertikale Verschiebung verantwortlich.

$$\begin{aligned} c < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach unten verschoben} \\ c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{unverschoben, d.h. Ursprungsparabel} \\ c > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach oben verschoben} \end{aligned}$$



8. Es gilt $b \in \mathbb{R}$, d.h. der Parameter b kann jeden Wert annehmen und er ist für die horizontale Verschiebung verantwortlich.

$$\begin{aligned} b = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{unverschoben, d.h. Scheitelpunkt auf } y\text{-Achse} \\ b \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{nach links oder rechts verschoben} \end{aligned}$$

9. Die Zuordnungsvorschrift

$$y = f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$

beschreibt ebenfalls eine quadratische Funktion, genauer deren Scheitelpunktform, mit dem Scheitelpunkt

$$S(x_s\,;\,y_s)$$

vergleiche FS 8.4.

10. Der Definitionsbereich D enthält alle x-Werte, welche die Funktion als Argument entgegen nehmen kann, also den „Input".

Weil die Variable x weder als Nenner in einem Bruch, noch als Radikand unter einer Wurzel oder als Numerus in einem Logarithmus vorkommt, vergleiche FS 4.2, gilt für jede quadratische Funktion

$$x \in D = \mathbb{R}$$

11. Der Wertebereich W enthält alle y-Werte, welche die Funktion zurückgeben kann, also den „Output".

Für den Wertebereich spielt der Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$ und die Öffnung der Kurve, d.h. der Streckungsfaktor a, eine grosse Rolle.

a) Falls die Kurve nach oben offen ist, ist der Scheitelpunkt ein Minimum und es gilt

$$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in W = [\,y_s\,;\infty[$$

b) Falls die Kurve nach unten offen ist, ist der Scheitelpunkt ein Maximum und es gilt

$$a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in W =]-\infty\,;\,y_s\,]$$

12. Mit $b = c = 0$ und der allgemeinen Form gilt

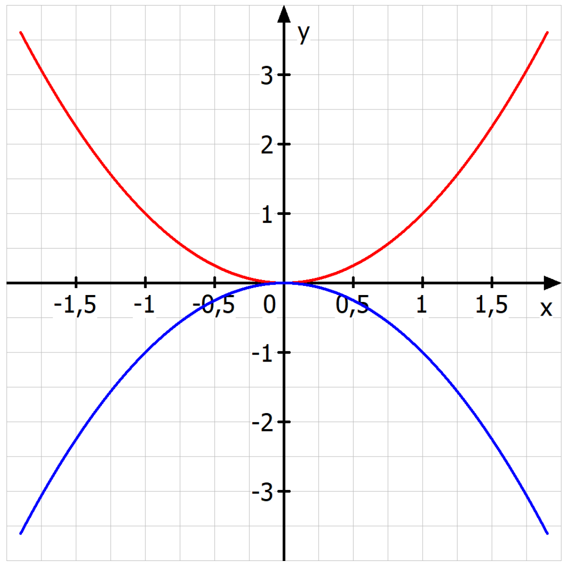
$$\begin{aligned} f(x) &= a\,x^2 + b\,x + c \\ &= a\,x^2 + 0 \cdot x + 0 = a\,x^2 \end{aligned}$$

und mit $x_s = y_s = 0$ und der Scheitelpunktform gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a\,(x - x_s)^2 + y_s \\ &= a\,(x - 0)^2 + 0 = a\,x^2 \end{aligned}$$

d.h. wenn $b = c = 0$ gilt, liegt der Scheitelpunkt der Parabel im Ursprung und es bleibt nur noch der Streckungsfaktor, welcher die Form der Kurve verändert. Mit $a = \pm 1$ gilt

$$f(x) = x^2 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -x^2$$



Die rote Kurve mit $a = 1$ nennt man Normalparabel und die blaue Kurve mit $a = -1$ könnte man negative Normalparabel nennen.