Gegeben sind quadratische Funktionen f, vergleiche FS 8.4, mit

a) $f(x) = 0.5\,x^2 + 2\,x + 3$ b) $f(x) = 2\,x^2 + 12\,x + 17$

c) $f(x) = -0.25\,x^2 + x$ d) $f(x) = -2\,x^2 - 2\,x + \frac{5}{2}$

e) $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}\,x + 1$ f) $f(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{4}{9}\,x + \frac{1}{9}$

Beantworte folgende Fragen.

1. Was ist das Ziel bei der quadratischen Ergänzung?
2. Welchen Vorteil hat die allgemeine Form?
3. Welchen Vorteil hat die Scheitelpunktform?
4. Warum gibt es bei quadratischen Funktionen verschiedene Formen?
5. Was haben die allg. Form und die Scheitelpunktform gemeinsam?
6. Welche Binome kommen bei der quadr. Ergänzung zur Anwendung?
7. Berechne die Scheitelpunktform von
$$f(x) = -2\,x^2 - 12\,x - 14$$
8. Berechne die Scheitelpunktformen der Funktionen a) bis f).

---

1. Aus der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion f, d.h.
$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$
soll die Scheitelpunktform
$$y = f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$
hergeleitet werden, vergleiche FS 8.4.
2. Bei der allgemeinen Form kann man wegen
$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$
den y-Achsenabschnitt c ohne zu rechnen ablesen.
3. Bei der Scheitelpunktform
$$y = f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$
kann man den Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$ ablesen.
4. Weil jede Form ihre Vorteile hat, siehe vorherige Teilaufgaben.
5. Der Streckungsfaktor a ist bei beiden Formen derselbe.
6. Es kommt immer das erste Binom
$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)^2$$
oder das zweite Binom
$$a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)^2$$
zur Anwendung. Das dritte Binom
$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$
ist nicht von Nutzen, da es nur als Produkt geschrieben werden kann. Bei der Scheitelpunktform benötigt man aber eine Potenz mit Exponent 2, d.h. entweder
$$(a + b)^2 \quad \text{oder} \quad (a - b)^2$$

7. Es folgt die Lösung ohne Kommentar und danach die Erklärung.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,x^2 - 12\,x - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 6\,x) - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x) - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x + 3^2) + 2\cdot 3^2 - 14 \\ &= -2\,(x+3)^2 + 18 - 14 \\ &= -2\,(x+3)^2 + 4 \end{aligned}$$

a) Bei den ersten zwei Summanden wird immer der Streckungsfaktor a ausgeklammert.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,x^2 - 12\,x - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 6\,x) - 14 \end{aligned}$$

b) Beim zweiten Summand in der Klammer wird immer der Faktor 2 abgespalten.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,(x^2 + 6\,x) - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x) - 14 \end{aligned}$$

c) Der zweite Summand in der Klammer ist positiv und damit kommt das erste Binom zur Anwendung. Durch den folgenden Vergleich ist wegen $x^2 = a^2$ klar, dass $a = x$ und damit $b = 3$ gilt.

$$\begin{aligned} &x^2 + 2\cdot 3\,x \\ &a^2 + 2\cdot a\,b \end{aligned}$$

Man ergänzt die Summenform des Binoms um b^2 bzw. 3^2 und kann sie dadurch in die Potenzform umschreiben, was Voraussetzung ist für die Scheitelpunktform.

$$\begin{aligned} x^2 + 2\cdot 3\,x + 3^2 &= (x+3)^2 \\ a^2 + 2\cdot a\,b + b^2 &= (a+b)^2 \end{aligned}$$

d) Für die quadratisch ergänzte Funktion gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x) - 14 \\ &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x + 3^2) + 2\cdot 3^2 - 14 \end{aligned}$$

wobei der Summand $2\cdot 3^2$ zur Korrektur hinzugefügt werden muss. Der Grund dafür wird im Punkt f) beschrieben.

e) Das Binom kann nun von der Summen- in die Potenzform umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,(x^2 + 2\cdot 3\,x + 3^2) + 2\cdot 3^2 - 14 \\ &= -2\,(x+3)^2 + 2\cdot 3^2 - 14 \end{aligned}$$

und mit der Vereinfachung

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,(x+3)^2 + 2\cdot 3^2 - 14 \\ &= -2\,(x+3)^2 + 18 - 14 \\ &= -2\,(x+3)^2 + 4 \end{aligned}$$

ist die Aufgabe gelöst, wobei der Scheitelpunkt bei

$$S(-3\,;\,4)$$

liegt.

f) Wegen

$$-2\cdot 3^2 = -18$$

würde der Graph $G(f)$ ohne Korrektur um 18 nach unten verschoben. Die Korrektur $2\cdot 3^2$ kompensiert diese Verschiebung gemäss

$$-2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^2 = -18 + 18 = 0$$

wieder, so dass $G(f)$ nicht verschoben wird.

8. a) Mit dem 1. Binom und $b = 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5\,x^2 + 2\,x + 3 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x\right) + 3 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2\right) - 0.5 \cdot 2^2 + 3 \\ &= 0.5\,(x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-2\,;\,1)$$

b) Mit dem 1. Binom und $b = 3$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x^2 + 12\,x + 17 \\ &= 2\,\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\right) + 17 \\ &= 2\,\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2\right) - 2 \cdot 3^2 + 17 \\ &= 2\,(x+3)^2 - 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-3\,;\,-1)$$

c) Mit dem 2. Binom und $b = 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.25\,x^2 + x \\ &= -0.25\,\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right) \\ &= -0.25\,\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2\right) + 0.25 \cdot 2^2 \\ &= -0.25\,(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(2\,;\,1)$$

d) Mit dem 1. Binom und $b = \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,x^2 - 2\,x + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x\right) + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,\left(-\frac{1}{2}\,;\,3\right)$$

e) Mit dem 2. Binom und $b = \frac{1}{3}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{2}{3}\,x + 1 \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ &= -\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{10}{9}\right)$$

Wenn man den Graphen $G(f)$ der Funktion f zeichnen müsste, wäre eine Skalierung von $9H = 1E$ sicher sinnvoll.

f) Mit dem 1. Binom und $b = \frac{2}{3}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{4}{9}\,x + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x\right) + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{27} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{27}\right)$$

Wenn man den Graphen $G(f)$ der Funktion f zeichnen müsste, wäre eine Skalierung von $27H = 1E$ sicher sinnvoll, wobei man dann nur noch einen kleinen Ausschnitt davon zeichnen könnte.

9. Abschliessende Bemerkung: Während den Prüfungen machen die Studierenden am meisten Fehler beim Ausklammern des Streckungsfaktors und beim Abspalten der Zahl 2 für das Mittelglied des Binoms. Nach dem ersten Rechenschritt sollte man daher die faktorisierte Form zwecks Kontrolle wieder ausmultiplizieren, z.B.

$$\frac{1}{3}\left(x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x\right) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{4}{9}\,x$$

in der letzten Aufgabe.