Gegeben sind quadratische Funktionen f, vergleiche FS 8.4, mit

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
g) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ h) $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$
i) $f(x) = -4x^2 - 8x - 5$ j) $f(x) = -7x^2 + 14x - 8.5$

Beantworte folgende Fragen.

1. Welchen Vorteil hat die allgemeine Form?
2. Welchen Vorteil hat die Scheitelpunktform?
3. Warum gibt es bei quadratischen Funktionen verschiedene Formen?
4. Was haben die allg. Form und die Scheitelpunktform gemeinsam?
5. Bestimme die Scheitelpunktform der Funktionen a) bis f) mit Hilfe des 1. oder 2. Binoms. Berechne auch den Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstelle(n) und zeichne den Graphen $G(f)$.
6. Dito für die Funktionen g) bis j), wobei zuerst der Streckungsfaktor ausgeklammert werden muss.

---

1. Bei der allgemeinen Form kann man wegen

$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

den y-Achsenabschnitt c ohne zu rechnen ablesen.

2. Bei der Scheitelpunktform

$$y = f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$$

kann man den Scheitelpunkt $S(x_s\,;\,y_s)$ ablesen.

3. Weil jede Form ihre Vorteile hat, siehe vorherige Teilaufgaben.

4. Der Streckungsfaktor a ist bei beiden Formen derselbe.

5. a) Mit dem 1. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-1\,;\,0)$$

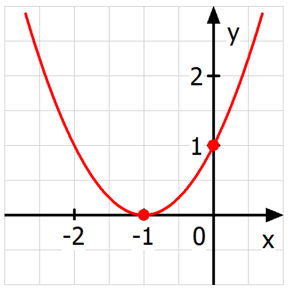
Es gilt

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

und wegen

$$(x+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| = \sqrt{0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0$$

hat die Funktion eine zweifache Nullstelle bei $x = -1$, d.h. der Scheitelpunkt S ist zugleich Nullstelle.



b) Mit dem 1. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2x+2 \\ &= x^2+2x+1+1 \\ &= (x+1)^2+1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-1\,;\,1)$$

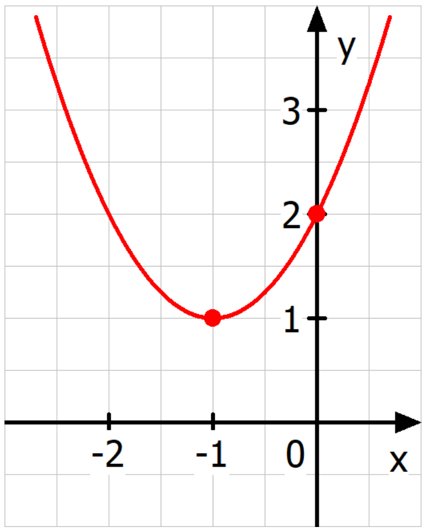
Es gilt

$$f(0) = 0^2+2\cdot 0+2 = 2$$

und wegen

$$(x+1)^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2=-1$$

hat die Funktion keine Nullstelle.



c) Mit dem 1. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2x-1 \\ &= x^2+2x+1-2 \\ &= (x+1)^2-2 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-1\,;\,-2)$$

Es gilt

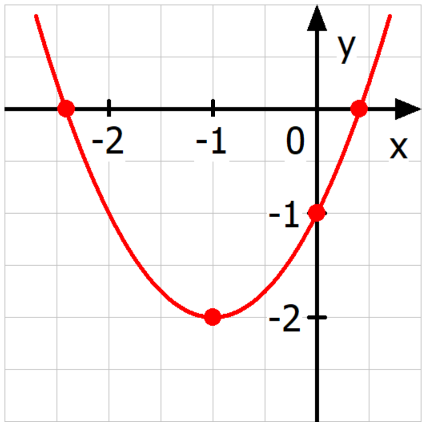
$$f(0) = 0^2+2\cdot 0-1 = -1$$

und wegen

$$(x+1)^2-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1|=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-1\pm\sqrt{2}$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

$$x_1=-1-\sqrt{2}\approx -2.414 \quad \text{und} \quad x_2=-1+\sqrt{2}\approx 0.414$$



d) Mit dem 2. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(1\,;0)$$

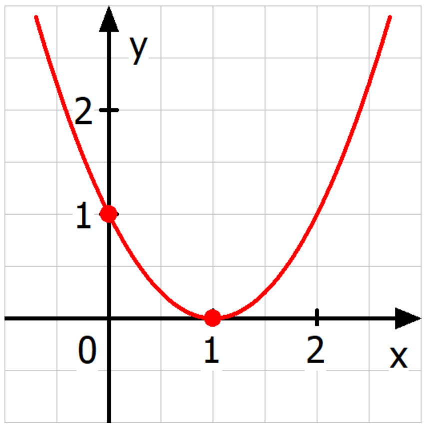
Es gilt

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

und wegen

$$(x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| = \sqrt{0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0$$

hat die Funktion eine zweifache Nullstelle bei $x = 1$, d.h. der Scheitelpunkt S ist zugleich Nullstelle.



e) Mit dem 2. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= (x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(1\,;1)$$

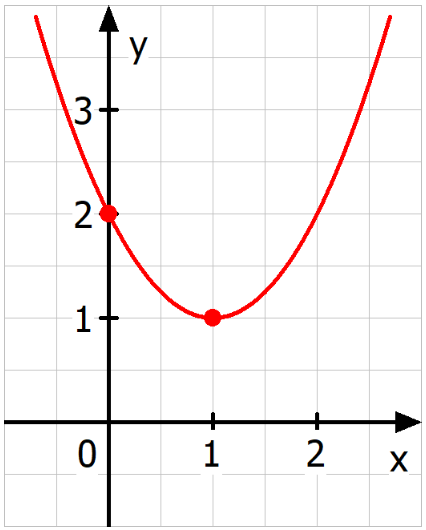
Es gilt

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

und wegen

$$(x-1)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = -1$$

hat die Funktion keine Nullstelle.



f) Mit dem 2. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 2 \\ &= (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(1\,;\,-2)$$

Es gilt

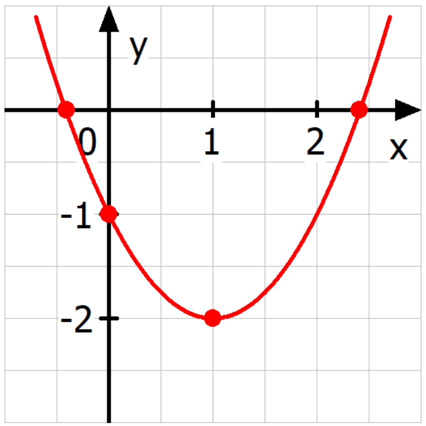
$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

und wegen

$$(x-1)^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

hat die Funktion zwei Nullstellen bei

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414 \quad \text{und} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$$



6. g) Mit dem 1. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x + 6 \\ &= 2x^2 + 4x + 2 + 4 \\ &= 2\,(x^2 + 2x + 1) + 4 \\ &= 2\,(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-1\,;\,4)$$

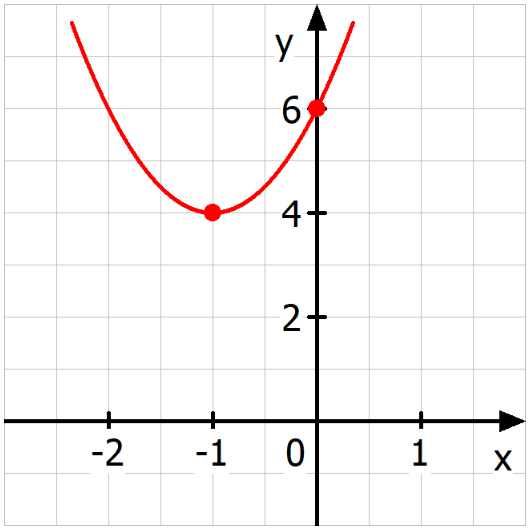
Es gilt

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 6 = 6$$

und wegen

$$2\,(x+1)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = -\frac{4}{2} = -2$$

hat die Funktion keine Nullstelle.



h) Mit dem 2. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\,x^2 - 6\,x + 10 \\ &= 3\,x^2 - 6\,x + 3 + 7 \\ &= 3\,(x^2 - 2\,x + 1) + 7 \\ &= 3\,(x-1)^2 + 7 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(1\,;7)$$

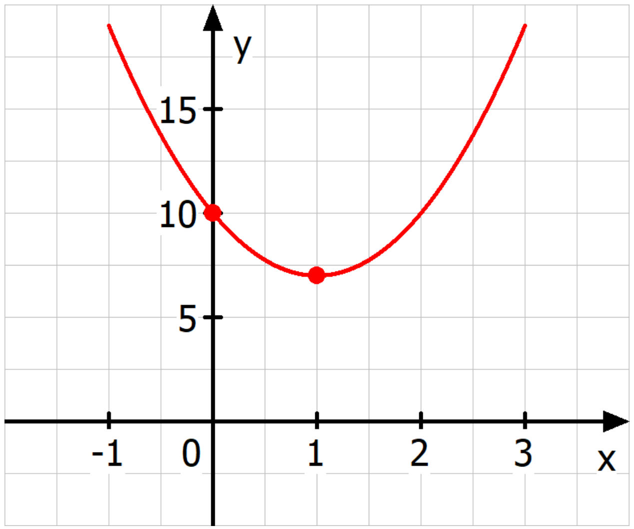
Es gilt

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 10 = 10$$

und wegen

$$3\,(x-1)^2 + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = -\frac{7}{3}$$

hat die Funktion keine Nullstelle.



i) Mit dem 1. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -4\,x^2 - 8\,x - 5 \\ &= -4\,x^2 - 8\,x - 4 - 1 \\ &= -4\,(x^2 + 2\,x + 1) - 1 \\ &= -4\,(x+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(-1\,;-1)$$

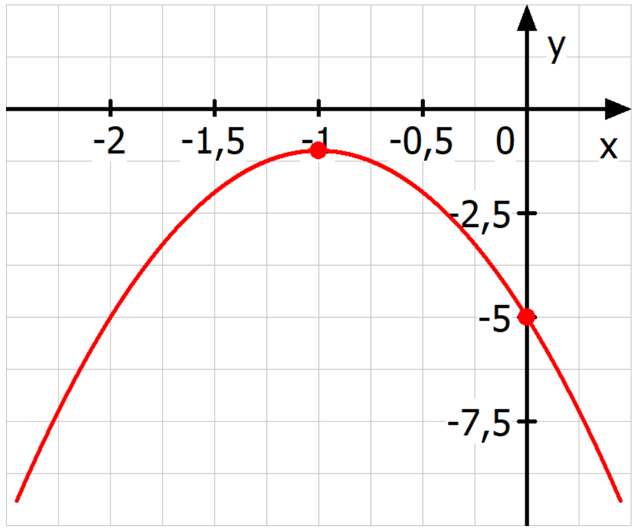
Es gilt

$$f(0) = -4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 5 = -5$$

und wegen

$$-4\,(x+1)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = -\frac{1}{4}$$

hat die Funktion keine Nullstelle.



j) Mit dem 2. Binom gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -7\,x^2 + 14\,x - 8.5 \\ &= -7\,x^2 + 14\,x - 7 - 1.5 \\ &= -7\,(x^2 - 2\,x + 1) - 1.5 \\ &= -7\,(x-1)^2 - 1.5 \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei

$$S\,(1\,;\,-1.5)$$

Es gilt

$$f(0) = -7 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 - 8.5 = -8.5$$

und wegen

$$-7\,(x-1)^2 - 1.5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = -\frac{1.5}{7}$$

hat die Funktion keine Nullstelle.