Gegeben ist eine quadratische Funktion f, vergleiche FS 8.4, mit

$$f(x) = 0.5\,(x+1.5)^2 - 2$$

Beantworte folgende Fragen.

1. Wie lautet der Definitionsbereich D?
2. In welcher Form liegt f vor?
3. Ist die Parabel nach oben oder nach unten offen?
4. Ist die Parabel gestreckt oder gestaucht?
5. Wieviel beträgt die vertikale Verschiebung von $G(f)$?
6. Wieviel beträgt die horizontale Verschiebung von $G(f)$?
7. Wo liegt der Scheitelpunkt S?
8. Hat $G(f)$ ein Minimum oder ein Maximum?
9. Wie lautet der Wertebereich W?
10. Wo liegt der Schnittpunkt mit der y-Achse?
11. Wo liegen die Nullstellen der Funktion?

---

1. Für jede quadratische Funktion gilt $x \in D = \mathbb{R}$
2. Die Funktion f liegt in der Scheitelpunktform

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ &= 0.5\,(x+1.5)^2 - 2 \\ &= 0.5\,(x-(-1.5))^2 - 2 \end{aligned}$$

   vor, vergleiche den Abschnitt Scheitelpunktform in FS 8.4.

3. Mit dem Streckungsfaktor $a = 0.5$ gilt

$$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{nach oben}$$

4. Mit dem Streckungsfaktor $a = 0.5$ gilt $|a| = 0.5$ und damit

$$0 < |a| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{gestaucht}$$

5. Ein Vergleich mit der Scheitelpunktform ergibt

$$y_s = -2$$

   d.h. die vertikale Verschiebung beträgt 2 nach unten.

6. Ein Vergleich mit der modifizierten Scheitelpunktform

$$f(x) = 0.5\,(x-(-1.5))^2 - 2$$

   ergibt

$$x_s = -1.5$$

   d.h. die horizontale Verschiebung beträgt 1.5 nach links.
   Man kann sich auch überlegen, welchen Wert man in

$$f(x) = 0.5\,(x+1.5)^2 - 2$$

   für x einsetzen muss, damit der Term in der Klammer Null ergibt.

7. Ein Vergleich mit der Scheitelpunktform ergibt

$$S(-1.5\,;\,-2)$$

8. Da die Parabel nach oben offen ist, ist S ein Minimum.
9. Für den Wertebereich gilt

$$y_s = -2 \quad \wedge \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad y \in W = \mathbb{R}^{\geq -2}$$

10. Für jeden Punkt auf der y-Achse gilt $x = 0$ und damit

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(0+\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{7}{8} = -0.875$$

11. Für jeden Punkt auf der x-Achse gilt $y = 0$ und damit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = 2\cdot 2 = 4$$

bzw. nach Radizieren und Umstellen

$$\left|x+\frac{3}{2}\right| = \sqrt{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{3}{2} = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{4}{2} - \frac{3}{2}$$

was die beiden Nullstellen

$$x_1 = -\frac{7}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

ergibt.

Man kann die Nullstellen auch berechnen, indem man die Scheitelpunktform ausmultipliziert und gleich Null setzt, gemäss

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 12x - 7 = 0$$

und die so erhaltene quadratische Gleichung löst

$$D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4\cdot 4\cdot(-7) = 144 - 112 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12\pm\sqrt{256}}{2\cdot 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{16}{8} = -\frac{3}{2} \pm \frac{4}{2}$$

$$x_1 = -\frac{7}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

12. $G(f)$ erhält man, indem man alle berechneten Punkte einträgt