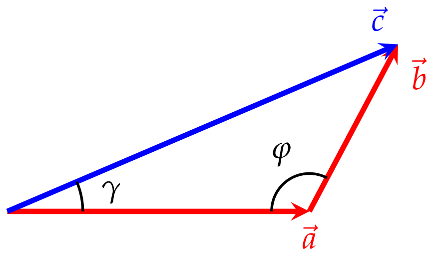
Gegeben sind die Beträge a und b zweier Vektoren sowie ihr Zwischenwinkel φ, siehe Zeichnung und Tabelle.



	a	b	φ
1.	3	15	90°
2.	8	5	118°
3.	4	1.8	34°

Gesucht ist je der Betrag c des Vektors $\vec{c}$ und der Winkel γ.

---

1. Wegen $\varphi = 90°$ ist mit Pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 15^2} = 15.3$$

und wegen $0° < \gamma < 90°$ gilt

$$\tan(\gamma) = \frac{G}{A} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{G}{A}\right)$$

und damit auch

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15}{3}\right) = 78.7°$$

2. Lösungsidee: gemäss Zeichnung in der Aufgabenstellung gilt

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

und man schreibt dafür

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

weil Vektoren nur in der kartesischen Form addiert werden können.

Für diese Addition werden aus den polaren Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die kartesischen Komponenten berechnet, d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

um danach aus den kartesischen Komponenten des Vektors $\vec{c}$ die polaren Komponenten zu berechnen.

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Für die Umrechnung von der polaren in die kartesische Form gilt

$$v_x = v \cdot \cos(\varphi)$$

$$v_y = v \cdot \sin(\varphi)$$

wobei sich der Winkel φ immer auf die Polarachse bezieht.

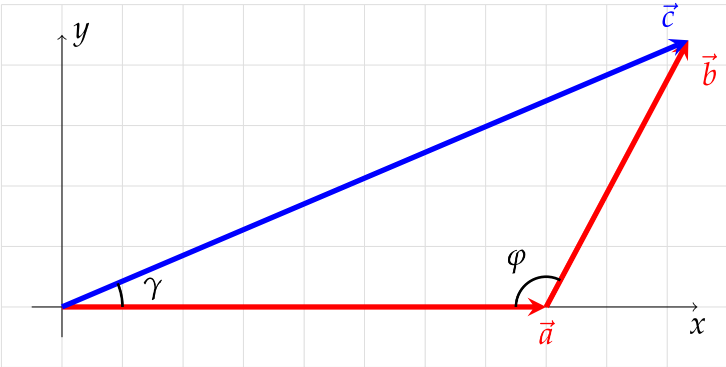
Für die Umrechnung von der kartesischen in die polare Form gilt

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

wobei für $v_x < 0$ noch 180° zu φ addiert werden müssen.

Damit man von kartesischen Komponenten sprechen kann, muss zuerst ein Bezugssystem, d.h. ein Koordinatensystem, festgelegt werden, wobei dieses frei gewählt werden kann.



Es vereinfacht die Rechnung, wenn man das Bezugssystem so legt, dass einer der Vektoren auf die Polarachse zu liegen kommt.

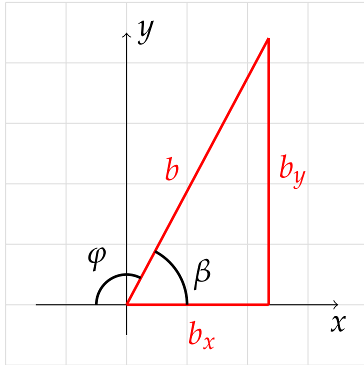
a) Mit dem Vektor $\vec{a}$ auf der Polarachse gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Winkel φ legt die Richtung des Vektors $\vec{b}$ fest, aber ein Richtungswinkel muss sich immer auf die Polarachse, d.h. die positive x-Halbachse, beziehen. Daher muss für die Berechnung der kartesischen Komponenten mit dem Winkel

$$\beta = 180° - \varphi = 180° - 118° = 62°$$

gerechnet werden, siehe Zeichnung.



Damit gilt für den Vektor $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\,\cos(\beta) \\ b\,\sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,\cos(62°) \\ 5\,\sin(62°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.35 \\ 4.41 \end{pmatrix}$$

c) Wegen $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ gilt

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b_x \\ 0 + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 2.35 \\ 0 + 4.41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ 4.41 \end{pmatrix}$$

und damit

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{10.4^2 + 4.41^2} = 11.2$$

sowie

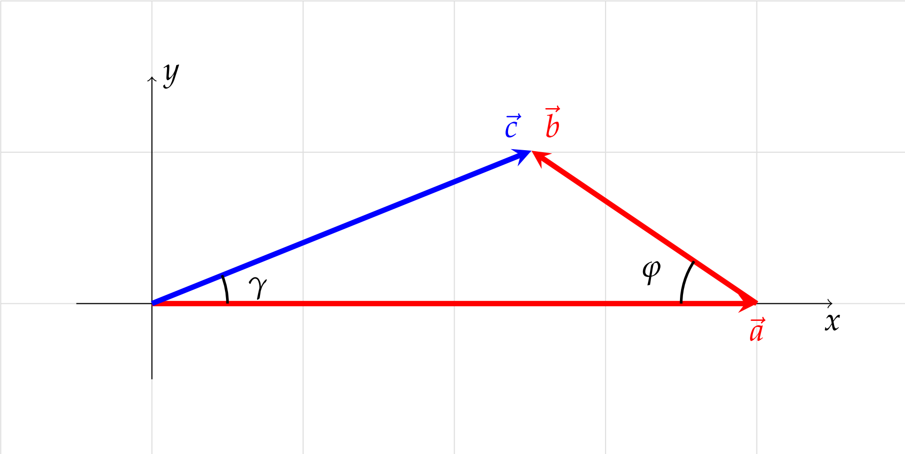
$$\gamma = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \arctan\left(\frac{4.41}{10.4}\right) = 23.1°$$

d) Bemerkung: der Richtungswinkel γ des Vektors $\vec{c}$ ist abhängig davon, wie man das Koordinatensystem wählt und daher willkürlich. Hätte man den Vektor $\vec{a}$ auf die positive y-Halbachse gelegt, so würde

$$\gamma = 23.1° + 90° = 113.1°$$

gelten, wobei der gesuchte Zwischenwinkel der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ immer noch 23.1° beträgt.

3. Wie bei der vorherigen Aufgabe kann das Koordinatensystem frei gewählt werden, wobei es die Rechnung vereinfacht, wenn einer der Vektoren auf die Polarachse zu liegen kommt.



a) Mit dem Vektor $\vec{a}$ auf der Polarachse gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

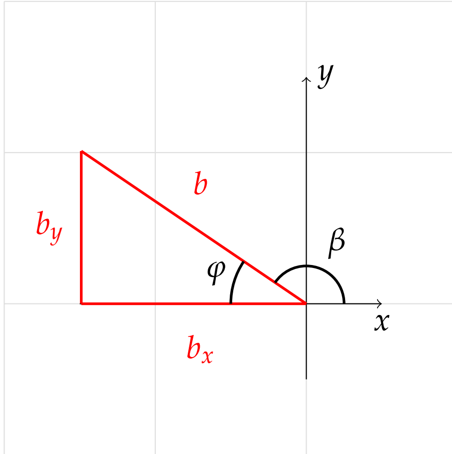
b) Der Winkel φ legt die Richtung des Vektors $\vec{b}$ fest, aber ein Richtungswinkel muss sich immer auf die Polarachse, d.h. die positive x-Halbachse, beziehen. Daher muss für die Berechnung der kartesischen Komponenten mit dem Winkel

$$\beta = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$$

gerechnet werden und es gilt für den Vektor $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\ \cos(\beta) \\ b\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8\ \cos(146^\circ) \\ 1.8\ \sin(146^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.49 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

siehe folgende Zeichnung.



c) Wegen $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ gilt

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b_x \\ 0 + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1.49 \\ 0 + 1.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.51 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

und damit

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{2.51^2 + 1.01^2} = 2.70$$

sowie

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \arctan\left(\frac{1.01}{2.51}\right) = 21.9^\circ$$