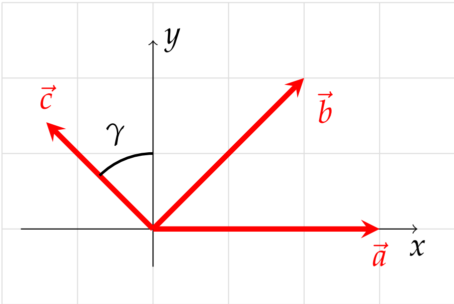
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit

$$a = 3, \quad b = 2.828, \quad c = 2 \quad \text{sowie} \quad \gamma = 45^\circ$$



Gesucht ist der Summenvektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ in der Polarform.

---

1. Vektoren kann man nur in der Komponentenform addieren, d.h. für den gesuchten Summenvektor $\vec{d}$ gilt

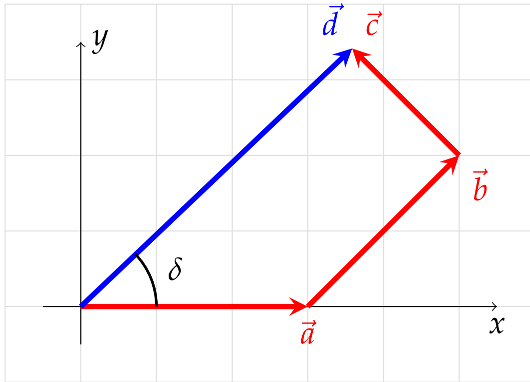
$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

   wobei d_x und d_y die kartesischen Komponenten sind.

2. Ausgehend von der Komponentenform kann man die Polarform berechnen, d.h.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix}$$

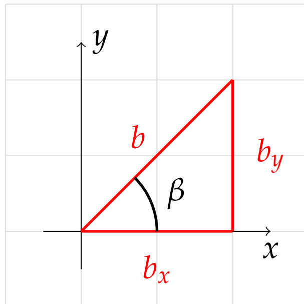
   wobei der Betrag $d = |\vec{d}|$ und der Richtungswinkel δ die polaren Komponenten sind, siehe Zeichnung.



3. Der Vektor $\vec{a}$ liegt auf der x-Achse, d.h. es gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Der Betrag b und die gesuchten kartesischen Komponenten b_x und b_y bilden ein rechtwinkliges Dreieck.



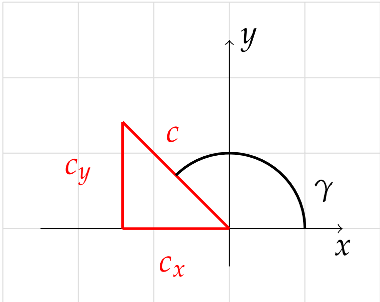
$$\cos(\beta) = \frac{A}{H} = \frac{b_x}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b_x = b \cdot \cos(\beta)$$

$$\sin(\beta) = \frac{G}{H} = \frac{b_y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b_y = b \cdot \sin(\beta)$$

Mit $b = 2.828$ und $\beta = 45°$ gilt

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot \cos(\beta) \\ b \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.828 \cdot \cos(45°) \\ 2.828 \cdot \sin(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Der Betrag c und die gesuchten kartesischen Komponenten c_x und c_y bilden ein rechtwinkliges Dreieck.



Für den Betrag c und die Komponenten c_x und c_y kann man dieselben Formeln

$$c_x = c \cdot \cos(\gamma)$$

und

$$c_y = c \cdot \sin(\gamma)$$

wie in der vorherigen Teilaufgabe verwenden. Es ist zu beachten, dass Winkel immer von der positiven x-Achse aus gemessen werden, d.h. es gilt

$$\gamma = 90° + 45° = 135°$$

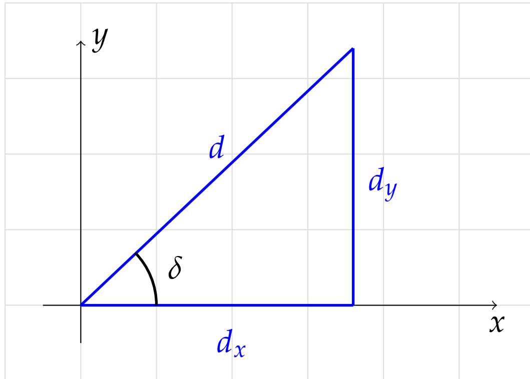
und somit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \cos(\gamma) \\ c \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(135°) \\ 2 \cdot \sin(135°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.414 \\ 1.414 \end{pmatrix}$$

6. Für die kartesischen Komponenten des Vektors $\vec{d}$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.414 \\ 1.414 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.586 \\ 3.414 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siehe Zeichnung.



7. Für den Betrag gilt mit Pythagoras

$$d = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2} = \sqrt{3.586^2 + 3.141^2} = 4.951$$

und für den Richtungswinkel

$$\delta = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \arctan\left(\frac{3.141}{3.586}\right) = 43.6°$$

d.h. die Polarform ist

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.951 \\ 43.6° \end{pmatrix}$$