

Gegeben ist ein LGS mit den Gleichungen A, B, C, D und E

$$\begin{array}{l|l} A & 2a - 2b + 3c + 3d + e = -1 \\ B & -2a + b - c - 3d + e = 2 \\ C & 3a + 3b + 2c + d + e = 1 \\ D & -a - b - c - d - e = -3 \\ E & -2a - 2b - 2c - 2d + e = 3 \end{array}$$

Gesucht ist die Lösung.

1. Durch Eliminieren einer Variable wird ein LGS mit nur noch vier Gleichungen bzw. Variablen hergeleitet.

a) Es soll die Variable e eliminiert werden. Man rechnet

$$A + D$$

woraus eine neue Gleichung F resultiert:

$$\begin{array}{l|l} A & 2a - 2b + 3c + 3d + e = -1 \\ D & -a - b - c - d - e = -3 \\ \hline + & a - 3b + 2c + 2d = -4 \quad F \end{array}$$

b) Es muss wieder e eliminiert werden. Man rechnet

$$B + D$$

woraus eine neue Gleichung G resultiert:

$$\begin{array}{l|l} B & -2a + b - c - 3d + e = 2 \\ D & -a - b - c - d - e = -3 \\ \hline + & -3a - 2c - 4d = -1 \quad G \end{array}$$

c) Es muss wieder e eliminiert werden. Man rechnet

$$C + D$$

woraus eine neue Gleichung H resultiert:

$$\begin{array}{l|l} C & 3a + 3b + 2c + d + e = 1 \\ D & -a - b - c - d - e = -3 \\ \hline + & 2a + 2b + c = -2 \quad H \end{array}$$

d) Es muss wieder e eliminiert werden. Man rechnet

$$E + D$$

woraus eine neue Gleichung I resultiert:

$$\begin{array}{l|l} E & -2a - 2b - 2c - 2d + e = 3 \\ D & -a - b - c - d - e = -3 \\ \hline + & -3a - 3b - 3c - 3d = 0 \quad I \end{array}$$

e) Damit hat man ein reduziertes LGS mit den vier Gleichungen F, G, H und I sowie den vier Variablen a, b, c und d.

$$\begin{array}{l|l} F & a - 3b + 2c + 2d = -4 \\ G & -3a - 2c - 4d = -1 \\ H & 2a + 2b + c = -2 \\ I & -3a - 3b - 3c - 3d = 0 \end{array}$$

2. Durch Eliminieren einer weiteren Variable wird ein LGS mit nur noch drei Gleichungen bzw. Variablen hergeleitet.

a) Es soll die Variable a eliminiert werden. Man rechnet

$$3 \cdot F + G$$

woraus eine neue Gleichung J resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 3 \cdot F & 3a - 9b + 6c + 6d = -12 \\ G & -3a \quad \quad -2c - 4d = -1 \\ \hline + & -9b + 4c + 2d = -13 \quad J \end{array}$$

b) Es muss wieder a eliminiert werden. Man rechnet

$$2 \cdot F - H$$

woraus eine neue Gleichung K resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 2 \cdot F & 2a - 6b + 4c + 4d = -8 \\ H & 2a + 2b + c \quad \quad = -2 \\ \hline - & -8b + 3c + 4d = -6 \quad K \end{array}$$

c) Es muss wieder a eliminiert werden. Man rechnet

$$3 \cdot F + I$$

woraus eine neue Gleichung L resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 3 \cdot F & 3a - 9b + 6c + 6d = -12 \\ I & -3a - 3b - 3c - 3d = 0 \\ \hline + & -12b + 3c + 3d = -12 \quad L \end{array}$$

d) Damit hat man ein reduziertes LGS mit den drei Gleichungen J, K und L sowie den drei Variablen b, c und d.

$$\begin{array}{r|l} J & -9b + 4c + 2d = -13 \\ K & -8b + 3c + 4d = -6 \\ L & -12b + 3c + 3d = -12 \end{array}$$

3. Durch Eliminieren einer weiteren Variable wird ein LGS mit nur noch zwei Gleichungen bzw. Variablen hergeleitet.

a) Es soll die Variable d eliminiert werden. Man rechnet

$$2 \cdot J - K$$

woraus eine neue Gleichung M resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 2 \cdot J & -18b + 8c + 4d = -26 \\ K & -8b + 3c + 4d = -6 \\ \hline - & -10b + 5c \quad \quad = -20 \quad M \end{array}$$

b) Es muss wieder d eliminiert werden. Man rechnet

$$1.5 \cdot J - L$$

woraus eine neue Gleichung N resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 1.5 \cdot J & -13.5b + 6.0c + 3.0d = -19.5 \\ L & -12.0b + 3.0c + 3.0d = -12.0 \\ \hline - & -1.5b + 3.0c \quad \quad = -7.5 \quad N \end{array}$$

c) Damit hat man ein reduziertes LGS mit den zwei Gleichungen M und N sowie den zwei Variablen b und c.

$$\begin{array}{r|l} M & -10.0b + 5.0c = -20.0 \\ N & -1.5b + 3.0c = -7.5 \end{array}$$

4. Durch Eliminieren einer weiteren Variable wird ein LGS mit nur noch einer Gleichung bzw. Variable hergeleitet.

a) Es soll die Variable c eliminiert werden. Man rechnet

$$3 \cdot M - 5 \cdot N$$

woraus eine neue Gleichung O resultiert:

$$\begin{array}{r|l} 3 \cdot M & -30.0b + 15.0c = -60.0 \\ 5 \cdot N & -7.5b + 15.0c = -37.5 \\ \hline - & -22.5b \quad \quad = -22.5 \quad O \end{array}$$

- b) Damit hat man die Gleichung O und daraus den Wert für die Variable b gemäss

$$-22.5b = -22.5 \Leftrightarrow b = 1.0$$

5. Durch rekursives Einsetzen in die obigen Gleichungen erhält man die noch fehlenden Werte für a, b, c, d und e.

- a) Einsetzen von b in die Gleichung M oder N ergibt

$$b = 1.0 \quad \text{und} \quad c = -2.0$$

- b) Einsetzen von b und c in die Gleichung J, K oder L ergibt

$$b = 1.0, \quad c = -2.0 \quad \text{und} \quad d = 2.0$$

- c) Einsetzen von b, c und d in die Gleichung F, G, H oder I ergibt

$$a = -1.0, \quad b = 1.0, \quad c = -2.0 \quad \text{und} \quad d = 2.0$$

- d) Einsetzen von a, b, c und d in die Gleichung A, B, C, D oder E ergibt

$$a = -1.0, \quad b = 1.0, \quad c = -2.0, \quad d = 2.0 \quad \text{und} \quad e = 3.0$$

- e) Die Lösung für das gegebene LGS ist der Punkt

$$(-1.0; 1.0; -2.0; 2.0; 3.0)$$

im fünfdimensionalen Raum.