Gegeben ist eine quadratische Gleichung mit Parameter n

$$-x^2+1=n\,(1+x)+4$$

Gesucht ist n so, dass diese quadratische Gleichung

1. genau eine Lösung hat, oder
2. keine Lösung hat, oder
3. zwei verschiedene Lösungen hat.

Bei einer quadratischen Gleichung ist es die Diskriminante D, welche über die Anzahl Lösungen entscheidet, vergleiche FS 4.4.

Ausmultiplizieren, umstellen und nach Potenzen von x ordnen ergibt

$$x^2+n\,(1+x)+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+n\,x+n+3=0$$

und ein Vergleich mit der allgemeinen Form

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

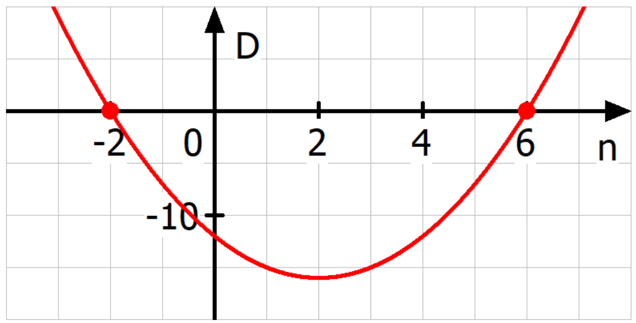
liefert

$$a=1,\quad b=n\quad\text{und}\quad c=n+3$$

wobei alles was weder Faktor bei x^2 noch Faktor bei x ist, zum Konstantglied c gehört. Für die Diskriminante gilt $D=b^2-4\,a\,c$ und damit

$$D=n^2-4\cdot 1\cdot(n+3)=n^2-4\,n-12=(n-6)\,(n+2)$$

Wenn man für n ein paar Zahlen einsetzt, erhält man die zugehörigen Werte für die Diskriminante D. Trägt man diese Zahlenpaare in ein Koordinatensystem mit n- und D-Achse ein, erhält man die folgende Zeichnung.



1. Die Gleichung hat genau dann „genau eine Lösung“, wenn

$$D=(n-6)\,(n+2)=0$$

gilt. Somit muss $n\in\{-2\,;\,6\}$ gelten, vergleiche die Zeichnung.

2. Die Gleichung hat genau dann „keine Lösung“, wenn

$$D=(n-6)\,(n+2)<0$$

gilt. Für den Parameter n muss

$$n\in\,]-2\,;\,6[$$

gelten, denn dort sind die D-Werte negativ, d.h. sie liegen unterhalb der n-Achse.

3. Die Gleichung hat genau dann „zwei verschiedene Lösungen“, wenn

$$D=(n-6)\,(n+2)>0$$

gilt. Für den Parameter n muss

$$n\in\,]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]6\,;\,\infty[$$

gelten, denn dort sind die D-Werte positiv, d.h. sie liegen oberhalb der n-Achse.