Gegeben sind die zwei Gleichungen

$$(x-2)^4-4=-3\,(x-2)^2 \quad \text{und} \quad |x+2|^2-4\,|x+2|=12$$

Gesucht sind je die Lösungen, vergleiche FS 4.12.

---

1. Umstellen sowie $a^{m\,n}=(a^m)^n$ ergeben die biquadratische Gleichung

$$(x-2)^4+3\,(x-2)^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left((x-2)^2\right)^2+3\,(x-2)^2-4=0$$

Die Substitution

$$z=(x-2)^2$$

liefert eine quadratische Gleichung in z

$$z^2+3\,z-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z+4)=0$$

mit den Zwischenlösungen

$$z_1=1 \quad \text{und} \quad z_2=-4$$

Als Alternative zur Linearfaktorzerl. ergibt die abc-Formel mit

$$z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}$$

dieselben Zwischenlösungen. Umstellen der Gleichung für die Substitution liefert jene für die Rücksubstitution

$$z=(x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}-2=\pm\sqrt{z} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{z}+2$$

und damit die zwei Lösungen

$$x_1=\sqrt{1}+2=3 \quad \text{und} \quad x_2=-\sqrt{1}+2=1$$

für die biquadratische Gleichung in x. Man beachte, dass die Substitution $z=(x-2)^2$ wegen

$$(x-2)^2\geq 0$$

keine negativen Zwischenlösungen zulässt, wodurch $z_2=-4$ nicht rücksubstituiert werden kann.

2. Umstellen ergibt die quadratische Betragsgleichung

$$|x+2|^2-4\,|x+2|-12=0$$

Die Substitution

$$z=|x+2|$$

liefert eine quadratische Gleichung in z

$$z^2-4\,z-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)\,(z-6)=0$$

mit den Zwischenlösungen

$$z_1=-2 \quad \text{und} \quad z_2=6$$

Die abc-Formel würde dieselben Zwischenlösungen liefern. Umstellen der Gleichung für die Substitution liefert jene für die Rücksubstitution

$$z=|x+2| \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}+2=\pm z \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\pm z-2$$

und damit die zwei Lösungen

$$x_1=6-2=4 \quad \text{und} \quad x_2=-6-2=-8$$

für die quadratische Betragsgleichung in x. Man beachte, dass die Substitution $z=|x+2|$ wegen

$$|x+2|\geq 0$$

keine negativen Zwischenlösungen zulässt, wodurch $z_1=-2$ nicht rücksubstituiert werden kann.