Gegeben sind die zwei biquadratischen Gleichungen

$$x^4 + 4 = 5\,x^2 \quad \text{und} \quad 3\,x^4 + 24\,x^2 = 27$$

Gesucht sind je die Lösungen, mit und ohne Substitution berechnet, vergleiche FS 4.12. Falls das Thema Funktionen bekannt ist, sollen die Lösungen graphisch interpretieren werden.

---

1. Umstellen sowie $a^{m\,n} = (a^m)^n$ ergeben die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2\right)^2 - 5\,x^2 + 4 = 0$$

   a) Die Substitution

$$z = x^2$$

   liefert eine quadratische Gleichung in z

$$z^2 - 5\,z + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z-4) = 0$$

   mit den Zwischenlösungen

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = 4$$

   Als Alternative zur Linearfaktorzerl. ergibt die abc-Formel mit

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

   dieselben Zwischenlösungen. Die Rücksubstitution

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z}$$

   liefert die vier Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

   für die biquadratische Gleichung in x.

   b) Mittels Faktorzerlegung, d.h. ohne Substitution, erhält man

$$\left(x^2\right)^2 - 5\,x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0$$

   und mit dem 3. Binom gemäss

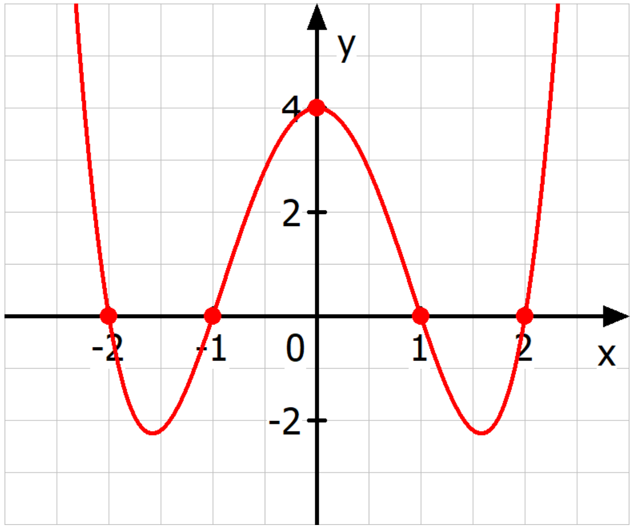
$$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2) = 0$$

   dieselben vier Lösungen $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm 2$.

   c) Wenn man die biquadratische Gleichung als Funktion f mit

$$f(x) = x^4 - 5\,x^2 + 4 = (x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2)$$

   betrachtet, dann stehen die vier Lösungen für die Schnittpunkte mit der x-Achse und $f(0) = 4$ für den Schnittpunkt mit der y-Achse.



2. Umstellen sowie $a^{m\,n} = (a^m)^n$ ergeben die biquadratische Gleichung

$$x^4 + 8\,x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2\right)^2 + 8\,x^2 - 9 = 0$$

a) Die Substitution

$$z = x^2$$

liefert eine quadratische Gleichung in z

$$z^2 + 8\,z - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z+9) = 0$$

mit den Zwischenlösungen

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = -9$$

Als Alternative zur Linearfaktorzerl. ergibt die abc-Formel mit

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

dieselben Zwischenlösungen. Die Rücksubstitution

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z}$$

liefert die zwei Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

für die biquadratische Gleichung in x. Man beachte, dass die Substitution $z = x^2$ wegen

$$x^2 \geq 0$$

keine negativen Zwischenlösungen zulässt, wodurch $z_2 = -9$ nicht rücksubstituiert werden kann.

b) Mittels Faktorzerlegung, d.h. ohne Substitution, erhält man

$$\left(x^2\right)^2 + 8\,x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 1\right)\,\left(x^2 + 9\right) = 0$$

und mit dem 3. Binom gemäss

$$\left(x^2 - 1\right)\,\left(x^2 + 9\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,(x-1)\,\left(x^2 + 9\right) = 0$$

dieselben zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm 1$. Man beachte, dass der Faktor $(x^2 + 9)$ wegen

$$x^2 + 9 \geq 9 > 0$$

nicht weiter in Linearfaktoren zerlegt werden kann.

c) Wenn man die biquadratische Gleichung als Funktion f mit

$$f(x) = x^4 + 8\,x^2 - 9 = (x+1)\,(x-1)\,\left(x^2 + 9\right)$$

betrachtet, dann stehen die zwei Lösungen für die Schnittpunkte mit der x-Achse und $f(0) = -9$ für jenen mit der y-Achse.