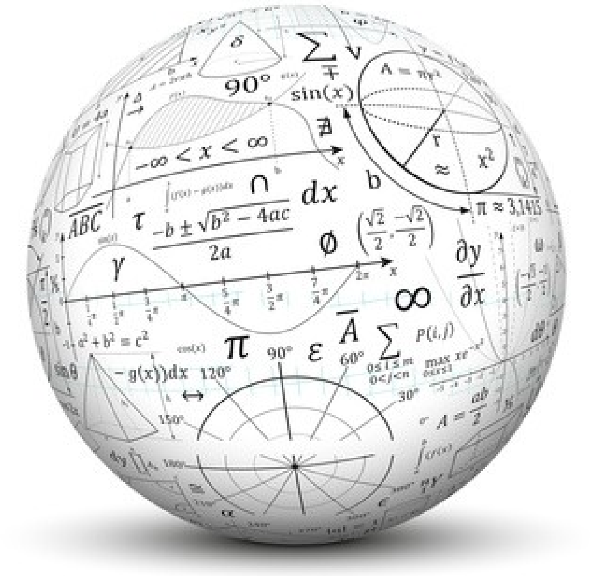
Formelsammlung Mathematik



Die Welt der Zahlen, ein Bild der Humboldt-Universität zu Berlin, siehe die Lizenz CC BY-SA 4.0.

Diese Formelsammlung für Mathematik wurde geschrieben für Studierende technischer Fachrichtungen an höheren Fachschulen in der Schweiz. Das umfangreiche Thema Geometrie wurde weggelassen, d.h. die Formelsammlung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Meine Studenten geniessen 4 Semester Unterricht in Mathematik, d.h. 4 mal 19 Halbtage à 4 Lektionen zu je 45 Minuten. Dabei werden folgende Themen abgedeckt:

- Die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren, sowie wenig Mengenlehre und Logik. Danach lineare und quadratische Gleichungen, sowie Bruch-, Wurzel- und Exponentialgleichungen und Gleichungen mit logarithmischen Termen in der Unbekannten. Abschliessend Ungleichungen sowie komplexe Zahlen.

- Lineare Gleichungssysteme mit bis zu vier Unbekannten. Geometrie in der Ebene, d.h. Dreiecke, Vierecke, Vielecke und Kreise, sowie Pythagoras und die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotanges am Einheitskreis. Sinus- und Cosinussatz sowie weitere Formeln aus der Trigonometrie.

- Lineare und quadratische Funktionen, gebrochenrationale Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponential- und logarithmische Funktionen und abschliessend die trigonometrischen Funktionen. All diese Funktionen werden diskutiert und es wird viel Wert auf das Zeichnen von Graphen gelegt.

- Differenzialrechnung mit den Ableitungsregeln und der erweiterten Diskussion von Funktionen, d.h. der Bestimmung von Extrema und Wendepunkten. Abschliessend und falls genug Zeit bleibt noch kurz die Integralrechnung, insbeondere die Berechnung eines Gebiets („Fläche“) unter einem Funktionsgraphen.

Daniel Stutz, Bern den 27.06.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Logik

1.1 Zahlenmengen

Für einige häufig verwendete Mengen hat man Abkürzungen definiert, z.B. schreibt man kurz $\mathbb{N}$ anstatt $\{1,2,3,\ldots\}$. Weiter schreibt man z.B. $1 \in \mathbb{N}$ weil die Zahl 1 ein Element der natürlichen Zahlen ist, hingegen schreibt man $-1 \notin \mathbb{N}$ weil die Zahl -1 kein Element der natürlichen Zahlen ist.

1.1.1 Aufzählende Form

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$	natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Z}^- = \{-1,-2,\ldots\}$	negative ganze Zahlen
$\mathbb{Z}^+ = \{1,2,\ldots\}$	positive ganze Zahlen

Die Zahl 0 ist vorzeichenlos. Es ist eine Frage der Definition, ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gehört oder nicht. In dieser Formelsammlung soll $0 \notin \mathbb{N}$ gelten. Bei der aufzählenden Form werden die Elemente der Menge aufgezählt, z.B. schreibt man $M = \{1,4,9,16,25,36,\ldots\}$ für die Menge der Quadratzahlen.

1.1.2 Beschreibende Form

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$	rationale Zahlen
$G = \{\pm 2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$	gerade Zahlen
$U = \{\pm 2n-1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$	ungerade Zahlen
$G^+ = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	positive gerade Zahlen
$U^+ = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$	positive ungerade Zahlen

Die Zahl 0 ist gerade. Bei der beschreibenden Form werden die Elemente der Menge beschrieben, z.B. schreibt man $M = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ für die Menge der Quadratzahlen. In der beschreibenden Form könnte man die ganzen Zahlen durch $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ausdrücken.

1.1.3 Intervalle

Die Intervallschreibweise von Mengen wird im Abschnitt 1.2 erklärt.

$\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^- =]-\infty;0[$	negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^- =]-\infty;0]$	nicht positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+ = [0;\infty[$	nicht negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+ =]0;\infty[$	positive reelle Zahlen

Die Menge der irrationalen Zahlen wird durch die Differenzmenge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bezeichnet, Beispiele für solche Zahlen sind $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{7}$ und $\pm\pi$ sowie $\pm e$ mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2.718$.

1.2 Intervallschreibweise

In den beiden folgenden Unterabschnitten soll mit $a, b \in \mathbb{R}$ gelten $a < b$, d.h. a ist die untere Grenze und b die obere Grenze des Intervalls.

1.2.1 Endliche Intervalle

$[a;b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a;b[= \{x \mid a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$]a;b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$]a;b[= \{x \mid a < x < b\}$	offenes Intervall

1.2.2 Unendliche Intervalle

$[a;\infty[= \{x \mid a \leq x < \infty\}$	halboffenes Intervall
$]a;\infty[= \{x \mid a < x < \infty\}$	offenes Intervall
$]-\infty;b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$]-\infty;b[= \{x \mid -\infty < x < b\}$	offenes Intervall

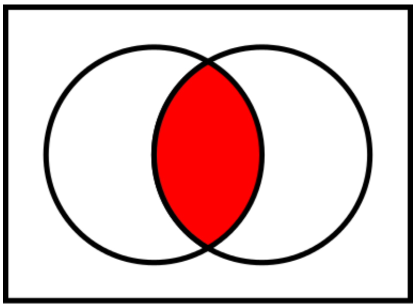
1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

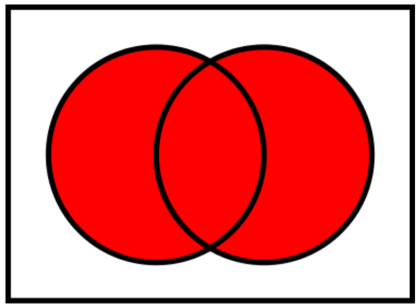
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von einzelnen Elementen. Diese Elemente müssen verschieden und dürfen ungeordnet sein. $x \in A$ bedeutet „x ist Element der Menge A“ und $x \notin A$ bedeutet „x ist nicht Element der Menge A“. Die leere Menge wird durch das Symbol $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet. Für eine endliche Menge A ist die Mächtigkeit (oder Kardinalität) $n = |A|$ gleich der Anzahl der Elemente der Menge, d.h. es gilt $n \in \mathbb{N}_0$.

1.3.2 Mengendiagramme und -operatoren

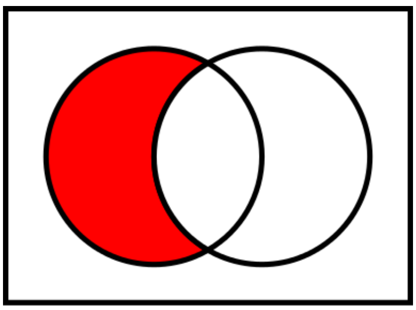
Die folgenden Mengendiagramme stammen von der Website Wikipedia und sind dort unter dem Stichwort „Menge (Mathematik)“ zu finden.



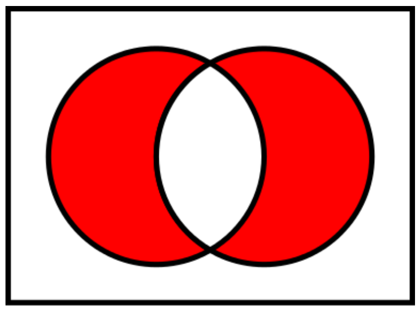
Schnittmenge $A \cap B$



Vereinigungsmenge $A \cup B$



Differenzmenge $A \setminus B$



Symmetrische Differenzmenge $A \triangle B$

Mit Hilfe der Mengenoperatoren $\cap$, $\cup$, $\setminus$ und $\triangle$ kann man zwei Mengen A und B zu einer neuen Menge verknüpfen. Das Rechteck steht hier für die Grundmenge G.

1.3.3 Mengenrelationen

Gleiche Mengen	$A = B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Teilmenge	$A \subset B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$
Echte Teilmenge	$A \subsetneq B :\Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$

Mit Hilfe der Mengenrelationen $=$, $\subset$ und $\subsetneq$ kann man die Beziehung zwischen zwei Mengen A und B beschreiben. Für jede Menge A gilt $A \subset A$, d.h. jede Menge ist Teilmenge von sich selbst. Ausserdem gilt für jede Menge A auch $\emptyset \subset A$, d.h. die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

1.4 Logik

1.4.1 Eigenschaften

- Jede Aussage der (klassischen) Logik hat einen von genau zwei Wahrheitswerten, meist „falsch" und „wahr" oder auch 0 und 1, was man das Prinzip der Zweiwertigkeit nennt.
- Der Wahrheitswert jeder zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt, was man Prinzip der Extensionalität nennt.

1.4.2 Logikoperatoren (Junktoren)

Mit Hilfe der Logikoperatoren $\wedge$, $\vee$ und $\veebar$ kann man zwei Aussagen A und B zu einer neuen Aussage verknüpfen.

A	B	$\neg A$ „NOT A"	$A \wedge B$ „A AND B"	$A \vee B$ „A OR B"	$A \veebar B$ „A EXOR B"
0	0	1	0	0	0
0	1		0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1		1	1	0

Die Zahl 0 steht auch für „falsch" oder „false" und die Zahl 1 für „wahr" oder „true". Die englische Abkürzung EXOR steht für „EXclusive OR", bzw. „Exklusives Oder" und entspricht somit dem umgangssprachlichen „Oder", was zu Verwechslungen mit dem mathematischen „Oder" führen kann.

- $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt.
- $A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn sowohl A wie auch B wahr ist, sonst immer falsch.
- $A \vee B$ ist nur dann falsch, wenn sowohl A wie auch B falsch ist, sonst immer wahr.
- $A \veebar B$ ist nur dann wahr, wenn entweder A oder B wahr ist.

1.4.3 Mengenoperatoren

Mit Hilfe der Logikoperatoren $\wedge$, $\vee$ und $\veebar$ kann man die Mengenoperatoren $\cap$, $\cup$, $\setminus$ und $\triangle$ definieren.

Schnittmenge	$A \cap B = \{x \in G \,\vert\, x \in A \wedge x \in B\}$
Vereinigungsmenge	$A \cup B = \{x \in G \,\vert\, x \in A \vee x \in B\}$
Differenzmenge	$A \setminus B = \{x \in G \,\vert\, x \in A \wedge x \notin B\}$
Symmetrische Differenzmenge	$A \triangle B = \{x \in G \,\vert\, x \in A \veebar x \in B\}$
Komplementmenge	$\overline{A} = G \setminus A = \{x \in G \,\vert\, x \notin A\}$
Produktmenge	$A \times B = \{(a,b) \,\vert\, a \in A \wedge b \in B\}$

Falls nichts anderes gesagt wird, gilt $G = \mathbb{R}$ für die Grundmenge. Mit Hilfe der Differenzmenge kann z.B. den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für den Term $\frac{1}{x}$ angeben, wobei $\mathbb{R}^*$ nur eine Kurzschreibweise für $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. Mit $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind also alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der Zahl Null gemeint.

1.4.4 Implikation und Äquivalenz

A	B	$A \Rightarrow B$ „wenn A dann B“	$A \Leftrightarrow B$ „A genau dann wenn B“
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Diese Beziehungen werden im Abschnitt 4.13 über das Umformen von Gleichungen verwendet.

2 Rechengesetze (Arithmetik)

2.1 Addition und Subtraktion

Dies sind Operationen erster Stufe, d.h. Strichoperationen.

	A-Gesetze $a, b, c \in \mathbb{R}$	S-Gesetze $a, b, c \in \mathbb{R}$	
A 1		$a - b = a + (-b)$	S 1
A 2	$a + b = b + a$	$a - b \neq b - a$ aber $a - b = -(b - a)$	S 2
A 3	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a - (b + c) = a - b - c$	S 3
A 4	$a + (b + c) = a + b + c$	$a - (b - c) = a - b + c$	S 4
A 5	$a + 0 = 0 + a = a$	$a - 0 = a$ aber $0 - a = -a$	S 5

Weil die Addition oder Subtraktion mit der Zahl Null nichts bewirkt, siehe die Gesetze A5 und S5, nennt man sie auch das neutrale Element der Addition bzw. Subtraktion.

2.2 Quersummen

Seien $z_1, z_2, z_3, \ldots$ arabische Ziffern, d.h. $z_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

- Die Quersumme q einer Zahl $z_1z_2z_3z_4z_5z_6\ldots$ ist die Summe ihrer Ziffern, d.h.

$$q = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + \ldots$$

- Bei der alternierenden Quersumme q_a einer Zahl $z_1z_2z_3z_4z_5z_6\ldots$ werden die Ziffern abwechslungsweise addiert und subtrahiert, d.h.

$$q_a = z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + z_5 - z_6 + \ldots$$

2.3 Gegenzahl und Betrag

Gegenzahl	$a \to -a$ und $-a \to -(-a) = a$
Betrag	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$

Der Betrag einer Zahl kann als ihr Abstand zum Nullpunkt auf der Zahlengerade aufgefasst werden. Das Bilden der Gegenzahl einer Zahl bedeutet eine Spiegelung am Nullpunkt.

2.4 Multiplikation und Division

Dies sind Operationen zweiter Stufe, d.h. Punktoperationen und es gilt „Punkt vor Strich“. Wichtig ist, dass man nicht durch Null teilen kann, siehe dazu den Abschnitt 4.2 über Definitionsbereiche.

	M-Gesetze $a, b, c \in \mathbb{R}$	D-Gesetze $a \in \mathbb{R}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	
M 1		$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$	D 1
M 2	$a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$ aber $\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ mit $a \neq 0$	D 2
M 3	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$a : (b \cdot c) = a : b : c$	D 3
M 4	$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$	$a : (b : c) = a : b \cdot c$	D 4
M 5	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ mit $b \in \mathbb{R}$	D 5
M 6	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$\frac{a}{0}$ ist nicht definiert(!), aber $\frac{0}{b} = 0$	D 6
M 7	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$\frac{a}{1} = a$ aber $\frac{1}{b} = b^{-1}$	D 7
M 8	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	D 8
M 9	$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	D 9
M 10	$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	D 10
M 11	$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ mit $a \neq 0$	D 11

Weil die Multiplikation oder Division mit der Zahl Eins nichts bewirkt, siehe die Gesetze M7 und D7, nennt man sie auch das neutrale Element der Multiplikation bzw. Division.

2.5 Teilbarkeitsregeln

Der Ausdruck $b \mid a$ bedeutet „b teilt a“ oder auch „a ist teilbar durch b“.

Teiler	Regel für die Zahl a
$2 \mid a$	a ist teilbar durch 2, wenn sie gerade ist, d.h. wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
$3 \mid a$	a ist teilbar durch 3, wenn die Quersumme ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist.
$4 \mid a$	a ist teilbar durch 4, wenn ihre letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar sind.
$5 \mid a$	a ist teilbar durch 5, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.
$6 \mid a$	a ist teilbar durch 6, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
$8 \mid a$	a ist teilbar durch 8, wenn ihre letzten drei Ziffern durch 8 teilbar sind.
$9 \mid a$	a ist teilbar durch 9, wenn die Quersumme ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist.
$10 \mid a$	a ist teilbar durch 10, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.
$11 \mid a$	a ist teilbar durch 11, wenn die alternierende Quersumme ihrer Ziffern durch 11 teilbar ist.

Bei der alternierenden Quersumme werden die Ziffern abwechslungsweise addiert und subtrahiert, d.h. die alternierende Quersumme q_a von 734613 z.B. ist $q_a = 7 - 3 + 4 - 6 + 1 - 3 = 0$ und daher gilt $11 \mid 734613$.

2.6 Potenzieren und Radizieren (Wurzelrechnung)

Dies sind Operationen dritter Stufe, d.h. sie gehen „vor Punkt und Strich". Radizieren bedeutet die Frage nach der Basis einer Potenz (siehe dazu das Gesetz W1). Wichtig ist, dass man nicht aus jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ die Quadratwurzel ziehen kann, siehe dazu den Abschnitt 4.2 über Definitionsbereiche.

	P-Gesetze $a, b, m, n \in \mathbb{R}$	W-Gesetze $a, b, r, x \in \mathbb{R}_0^+$ und $m, n, w \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	
P 1		$x = \sqrt[w]{r} \quad \Leftrightarrow \quad x^w = r$	W 1
P 2		$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ mit $m \in \mathbb{R}$	W 2
P 3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	W 3
P 4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ mit $b \neq 0$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ mit $b > 0$	W 4
P 5	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und $a^m \cdot a = a^{m+1}$	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n+m}}$	W 5
P 6	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ und $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ mit $a \neq 0$	$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$ mit $a > 0$	W 6
P 7	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ mit $a, b \neq 0$		W 7
P 8	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	W 8
P 9	$a^0 = 1$ und $0^n = 0$ mit $a \neq 0, n > 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$	W 9
P 10	$a^1 = a$ und $1^n = 1$	$\sqrt[1]{a} = a$ und $\sqrt[n]{1} = 1$	W 10

2.7 Binomische Formeln

	B-Gesetze (Binome) $a, b \in \mathbb{R}$
B 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
B 2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
B 3	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
B 4	$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
B 5	$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

Mithilfe von Binomen oder der anschliessenden Linearfaktorzerlegung kann man häufig Summen in Produkte verwandeln. Dies ist z.B. von Vorteil, weil man in Brüchen nur Faktoren, nicht aber Summanden kürzen kann.

2.8 Linearfaktorzerlegung

Einen Ausdruck $x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ nennt man Linearfaktor. Wegen

$$(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + ab$$

kann man z.B eine Summe wie $x^2 + 3x + 2$ zerlegen in das Produkt $(x+1) \cdot (x+2)$. Man sucht dazu ein Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{R}$, für welches $a \cdot b = 2$ und $a + b = 3$ gilt.

2.9 Potenzen, Wurzeln und Beträge

Wenn aus einer Potenz die Wurzel gezogen wird, kann es vorkommen, dass negative Vorzeichen der Grösse $x \in \mathbb{R}$ verloren gehen. Entscheidend dabei ist, ob die Exponenten gerade, d.h. aus der Menge $G^+ = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ sind oder ungerade, d.h. aus $U^+ = \{2n-1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Wenn aber eine Wurzel potenziert wird, können keine Vorzeichen verloren gehen, d.h. es gibt auch keinen Betrag. Die Reihenfolge der Operationen ist also entscheidend.

	B-Gesetze (Beträge) $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$
B′ 1	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$
B′ 2	$\sqrt[3]{x^3} = x$
B′ 3	$\sqrt[2n]{x^{2n}} = \lvert x \rvert$
B′ 4	$\sqrt[2n-1]{x^{2n-1}} = x$
B′ 5	$\left(\sqrt[2n]{x}\right)^{2n} = x \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$
B′ 6	$\left(\sqrt[2n-1]{x}\right)^{2n-1} = x$

2.10 Logarithmieren

Dies ist eine Operation dritter Stufe, d.h. sie gehen „vor Punkt und Strich“. Logarithmieren bedeutet die Frage nach dem Exponenten einer Potenz (siehe dazu das Gesetz L1). Wichtig ist, dass man nicht aus jeder Zahl $n \in \mathbb{R}$ den Logarithmus ziehen kann, siehe dazu den Abschnitt 4.2 über Definitionsbereiche.

	L-Gesetze (mit speziellen Basen) $n \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$	L-Gesetze (mit allgemeinen Basen) $n, b, u, v \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}$	
L′ 1	$x = \lg(n) \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = n$	$x = \log_b(n) \quad \Leftrightarrow \quad b^x = n$	L 1
L′ 2	$10^{\lg(n)} = n$	$b^{\log_b(n)} = n$	L 2
L′ 3	$\lg(10^x) = x$	$\log_b(b^x) = x$	L 3
L′ 4	$\lg(10) = 1 \quad \text{und} \quad \lg(1) = 0$	$\log_b(b) = 1 \quad \text{und} \quad \log_b(1) = 0$	L 4
L′ 5	$\ln(e) = 1 \quad \text{und} \quad \ln(1) = 0$	$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$	L 5
L′ 6	$\log_{10}(n) = \lg(n) = \log(n)$ (Zehnerlog.)	$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$	L 6
L′ 7	$\log_e(n) = \ln(n)$ (natürlicher Log.)	$\log_b(u^x) = x \cdot \log_b(u)$	L 7
L′ 8	$\log_2(n) = \mathrm{lb}(n) = \mathrm{ld}(n)$ (Zweierlog.)	$\log_b(n) = \frac{\lg(n)}{\lg(b)} = \frac{\ln(n)}{\ln(b)} = \frac{\mathrm{lb}(n)}{\mathrm{lb}(b)}$	L 8

Die mathematische Konstante $e \approx 2.718$ nennt man die Eulersche Zahl.

3 Ungleichungen

3.1 Zahlengerade

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

	Z-Gesetze $a, b, c \in \mathbb{R}$
Z 1	$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b \;\; mit \;\; c > 0$
Z 2	$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - c = b \;\; mit \;\; c > 0$
Z 3	$a < b \quad \wedge \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

3.2 Monotoniegesetze

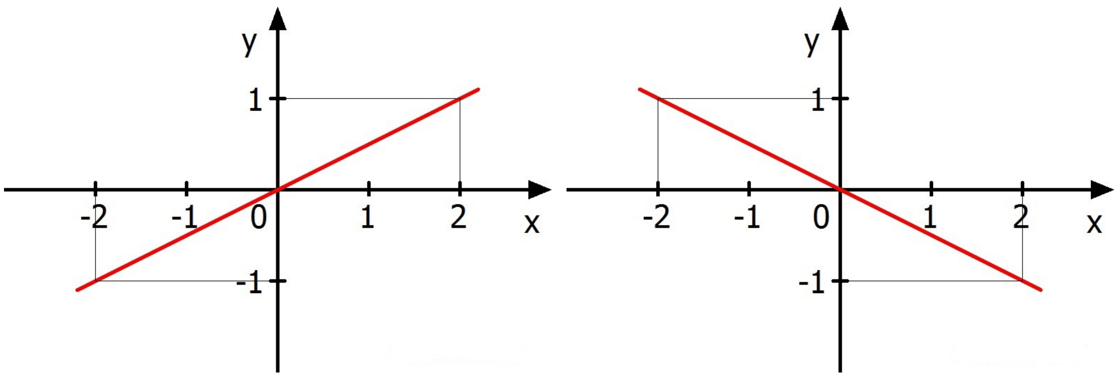
Die Gesetze U1 bis U6 werden häufig dazu verwendet, bei Gleichungen oder Funktionen die Definitionsbereiche zu berechnen, vergleich dazu die Abschnitte 4.2 und 8.

3.2.1 Monotoniegesetze für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

	U-Gesetze $a, b, c \in \mathbb{R}$
U 1	$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$
U 2	$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a - c < b - c$
U 3	$a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ac < bc$
U 4	$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ac > bc$
U 5	$a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
U 6	$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Man beachte insbesondere die beiden Gesetze U4 und U6, wo mit einer negativen Zahl c multipliziert bzw. durch eine solche dividiert wird, was dazu führt, dass das Relationszeichen von $<$ auf $>$ dreht.

Die Gesetze U3 und U4 besagen, dass eine lineare Funktion f mit $f(x) = c\,x$ für eine Steigung $c > 0$ streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt für $c < 0$, vergleiche dazu den Abschnitt 8.1.

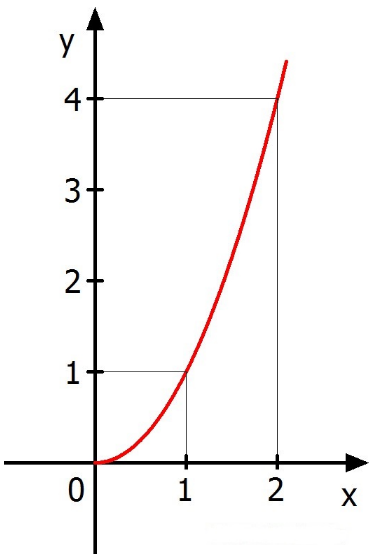


Gesetz U3 mit $c = 0.5$, $a = -2$ und $b = 2$ Gesetz U4 mit $c = -0.5$, $a = -2$ und $b = 2$

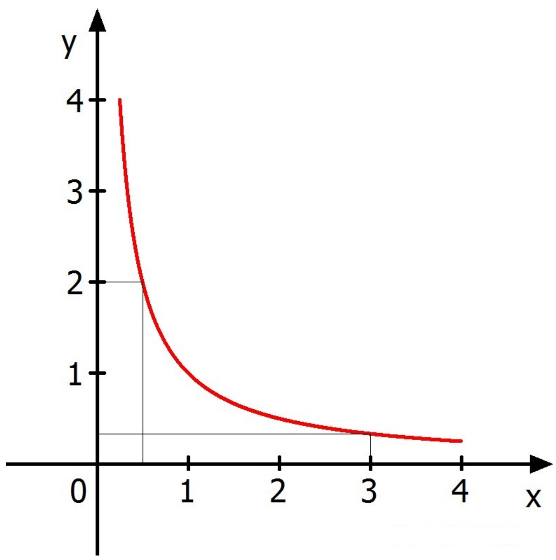
3.2.2 Monotoniegesetze für Potenzen und Wurzeln

	U-Gesetze $a, b, n \in \mathbb{R}^+$
U 7	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^n < b^n \;\; mit \;\; n > 1$
U 8	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \;\; mit \;\; n > 1$
U 9	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^n} > \frac{1}{b^n} \;\; mit \;\; n \geq 1$
U 10	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a}} > \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \;\; mit \;\; n > 1$

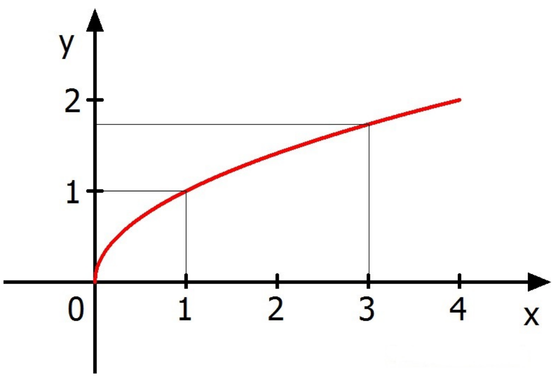
Die Gesetze U7 und U8 besagen, dass Polynomfunktionen f mit $f(x) = x^n$ bzw. Wurzelfunktionen f mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n > 1$ streng monoton wachsen und das Gesetze U9 bringt zum Ausdruck, dass Potenzfunktionen f mit $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \geq 1$ streng monoton fallen.



Gesetz U7 mit $n = 2$, $a = 1$ und $b = 2$



Gesetz U9 mit $n = 1$, $a = 0.5$ und $b = 3$

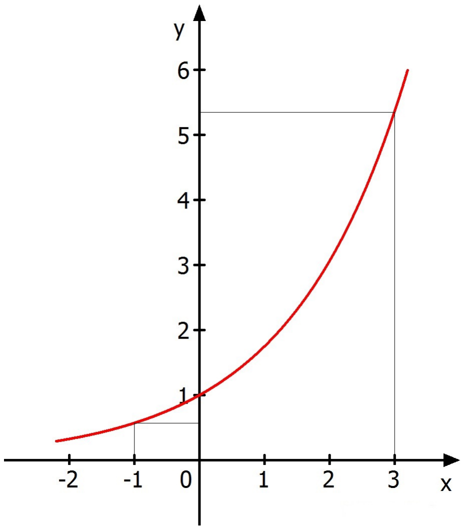


Gesetz U8 mit $n = 2$, $a = 1$ und $b = 3$

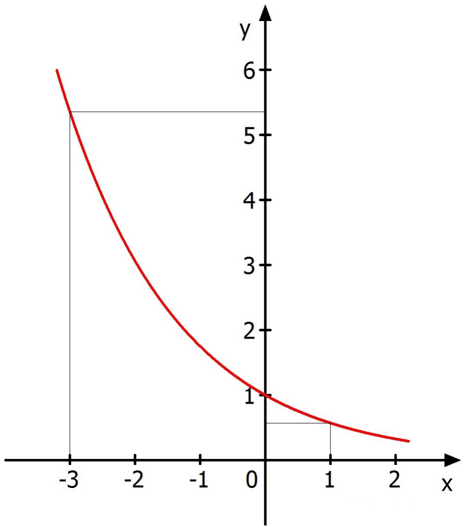
3.2.3 Monotoniegesetze für exponentielle Ausdrücke und Logarithmen

	U-Gesetze $a, b, \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$
U 11	$a < b \quad \Leftrightarrow \quad c^a < c^b \;\; mit \;\; c > 1$
U 12	$a < b \quad \Leftrightarrow \quad c^a > c^b \;\; mit \;\; c < 1$
U 13	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \log_c(a) < \log_c(b) \;\; mit \;\; c > 1$
U 14	$0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad \log_c(a) > \log_c(b) \;\; mit \;\; c < 1$

Die Gesetze U11 und U12 besagen, dass eine exponentielle Funktion f mit $f(x) = c^x$ für eine Basis $c > 1$ streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt für $0 < c < 1$, vergleiche dazu den Abschnitt 8.9.

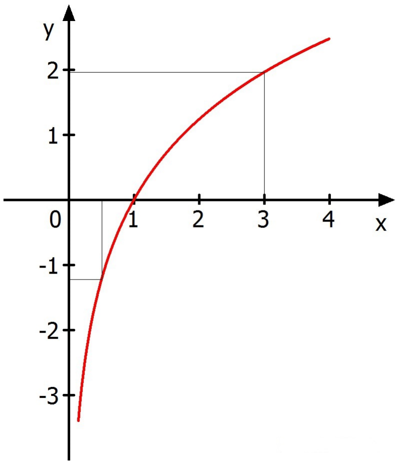


Gesetz U11 mit $c = \frac{7}{4}$, $a = -1$ und $b = 3$

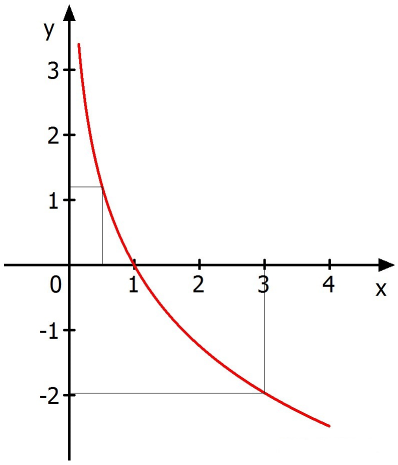


Gesetz U12 mit $c = \frac{4}{7}$, $a = -3$ und $b = 1$

Die Gesetze U13 und U14 besagen, dass eine logarithmische Funktion f mit $f(x) = \log_c(x)$ für eine Basis $c > 1$ streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt für $0 < c < 1$, vergleiche dazu den Abschnitt 8.10.



Gesetz U13 mit $c = \frac{7}{4}$, $a = 0.5$ und $b = 3$



Gesetz U14 mit $c = \frac{4}{7}$, $a = 0.5$ und $b = 3$

4 Gleichungen (Algebra)

4.1 Allgemein

Schrittweises Vorgehen um Gleichungen zu lösen:

1. Definitionsbereich D bestimmen.
2. Mögliche Lösung(en) für x bestimmen.
3. Kontrolle bezüglich Definitionsbereich: Gilt $x \in D$?
4. Kontrolle durch Einsetzen von x in die ursprüngliche Gleichung: Ergibt sich eine wahre Aussage?
5. Lösungsmenge L bestimmen.

Punkt 4 ist nur nötig, falls nicht-äquivalente Umformungen wie z.B. „Quadrieren“ oder „Multiplikation mit Null“ verwendet wurden (vergleiche die wichtige Tabelle im Unterabschnitt 4.13).

4.2 Definitionsbereich

4.2.1 Gleichungstypen mit $D = \mathbb{R}$

Bei folgenden Gleichungstypen gilt für den Definitionsbereich D immer $D = \mathbb{R}$, d.h. man darf für x jede reelle Zahl einsetzen.

- Lineare, quadratische und kubische Gleichungen (siehe Unterabschnitte 4.3, 4.4 und 4.5)
- Gleichungen vom Grad n (siehe Unterabschnitt 4.6)
- Betrags- und Exponentialgleichungen (siehe Unterabschnitte 4.11 und 4.10)

4.2.2 Gleichungstypen mit $D \neq \mathbb{R}$

Bei folgenden Gleichungstypen gilt für den Definitionsbereich D in der Regel $D \neq \mathbb{R}$, d.h. man darf für x nicht jede reelle Zahl einsetzen.

- Bei Bruchgleichungen (siehe Unterabschnitt 4.7) darf es nicht zu einer Division durch Null kommen, d.h. der Nennerterm $T(x)$ darf nicht gleich Null sein.

  $$\frac{1}{T(x)} \text{ ist definiert} \quad \Leftrightarrow \quad T(x) \neq 0$$

- Bei Wurzelgleichungen mit geraden Wurzelexponenten (siehe Unterabschnitt 4.8) ist darauf zu achten, dass der Radikand $T(x)$ nicht negativ sein darf.

  $$\sqrt{T(x)} \text{ ist definiert} \quad \Leftrightarrow \quad T(x) \geq 0$$

  Mit $n \in \mathbb{N}$ gilt also auch

  $$\sqrt[2n]{T(x)} \text{ ist definiert} \quad \Leftrightarrow \quad T(x) \geq 0,$$

  wobei $2\,n$ für eine beliebige gerade natürliche Zahl steht.

- Bei Logarithmusgleichungen (siehe Unterabschnitt 4.9) ist darauf zu achten, dass der Numerus $T(x)$ nicht negativ und nicht Null sein darf, d.h. er muss positiv sein.

  $$log_b(T(x)) \text{ ist definiert} \quad \Leftrightarrow \quad T(x) > 0$$

Treten in einer Gleichung n Terme mit eingeschränktem Definitonsbereich auf, so muss für jeden einzeln der Definitonsbereich bestimmt werden und danach deren Schnittmenge D gebildet werden.

$$D = D_1 \cap \ldots \cap D_n$$

Diese Schnittmenge, welche auch leer sein kann, ist der Definitionsbereich D für die gesamte Gleichung.

4.3 Lineare Gleichungen

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$a\,x - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,x = b$$

wobei folgende drei Fälle zu unterscheiden sind:

- Für $a \neq 0$ gilt: $\quad a \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad L = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
- Für $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt: $\quad 0 \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad L = \{\}$
- Für $a = 0$ und $b = 0$ gilt: $\quad 0 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \mathbb{R}$

Nur wenn der Faktor a vor dem x ungleich Null ist, darf man ihn wegdividieren. Je nachdem welche Werte a und b annehmen, kann es auch nur zwei Fälle geben, z.B. wenn gilt $b = 1$.

4.4 Quadratische Gleichungen

4.4.1 Allgemeine Form

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt mit der Diskriminante $D_i = b^2 - 4ac$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D_i}}{2a}$$

wobei folgende drei Fälle zu unterscheiden sind:

- Für $D_i < 0$ gilt: $\quad L = \{\}$
- Für $D_i = 0$ gilt: $\quad L = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
- Für $D_i > 0$ gilt: $\quad L = \left\{\frac{-b-\sqrt{D_i}}{2a}\,;\,\frac{-b+\sqrt{D_i}}{2a}\right\}$

Es gibt also entweder keine Lösung weil man für $D_i < 0$ die Quadratwurzel nicht ziehen kann, oder genau eine Lösung weil für $D_i = 0$ das $\pm$ vor der Quadratwurzel keine Rolle spielt, oder zwei verschiedene Lösungen weil der Ausdruck $\pm\sqrt{D_i}$ für $D_i > 0$ zwei verschiedene Werte zurück gibt. Eine quadratische Gleichung kann in maximal zwei Linearfaktoren zerlegt werden und kann daher auch nicht mehr als zwei Lösungen haben, siehe dazu den Unterabschnitt 4.4.6 über die Produktform einer quadratischen Gleichung.

4.4.2 Normalform

Für alle $b, c \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ nennt man $x^2 + bx + c = 0$ die Normalform. Die Berechnung der Lösung(en) erfolgt mit obiger Formel indem man dort $a = 1$ setzt.

4.4.3 Sonderform mit $c = 0$, d.h. gemischtquadratisch ohne Absolutglied

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad L = \left\{0\,;\,-\frac{b}{a}\right\}.$$

Eine solche Gleichung hat für $b \neq 0$ immer zwei verschiedene Lösungen und für $b = 0$ genau eine, nämlich $x = 0$.

4.4.4 Sonderform mit $b = 0$, d.h. reinquadratisch

Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$ax^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \Rightarrow \quad L = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}\,;\,\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}.$$

Wie man sieht, gibt es nicht für alle Belegungen von a und c Lösungen, z.B. für $a > 0 \wedge c > 0$ gilt $L = \{\}$.

4.4.5 Sonderform „Einfache Gleichung“

Für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$(x+m)^2 = n \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -m \pm \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad L = \left\{-m+\sqrt{n}\,; -m-\sqrt{n}\right\}.$$

Wie man sieht, gibt es nicht für alle Belegungen von n Lösungen, z.B. für $n < 0$ gilt $L = \{\}$. Siehe auch den wichtigen Unterabschnitt 4.13 für das Lösen von „Einfachen Gleichungen“.

4.4.6 Produktform

Für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$(x+m)\cdot(x+n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -m \wedge x_2 = -n \quad \Rightarrow \quad L = \{-m\,; -n\}.$$

Die Produktform bekommt man häufig durch Linearfaktorzerlegung.

4.4.7 Satz von Vieta

Bezogen auf die allgemeine Form gilt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

4.5 Kubische Gleichungen

4.5.1 Allgemeine Form mit $d \neq 0$, d.h. mit Absolutglied

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ nennt man

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

eine kubische Gleichung weil die höchste Potenz von x den Exponenten 3 hat. Falls eine oder mehrere Lösung(en) existieren, findet man diese vielleicht indem man das Absolutglied d in Faktoren zerlegt und diese in die Gleichung einsetzt, d.h. man versucht durch Probieren eine erste Lösung x_1 der Gleichung zu finden. Wenn man eine solche gefunden hat, kann man mittels Polynomdivision den Linearfaktor $(x - x_1)$ abspalten, wobei kein Rest bleiben darf. Der Ausdruck der übrig bleibt, hat dann quadratische Form und kann gelöst werden wie in Unterabschnitt 4.4 beschrieben. Eine kubische Gleichung kann in maximal drei Linearfaktoren zerlegt werden und kann daher auch nicht mehr als drei Lösungen haben.

4.5.2 Sonderform mit $d = 0$, d.h. ohne Absolutglied

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(ax^2 + bx + c) = 0$$

d.h. eine solche spezielle kubische Gleichung ohne Absolutglied d, lässt sich durch Abspalten des Linearfaktors x direkt auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Eine erste Lösung ist dann $x_1 = 0$ und die quadratische Gleichung liefert – in Abhängigkeit von der Diskriminante D – eventuell noch eine oder zwei weitere Lösungen.

4.6 Gleichungen vom Grad n

Für alle $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ nennt man

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

eine Gleichung vom Grad n weil die höchste Potenz von x den Exponenten n hat. Wie bei den kubischen Gleichungen kann man versuchen durch Probieren Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ bzw. Linearfaktoren $(x - x_1), (x - x_2), \ldots$ zu finden, um diese dann mittels Polynomdivision abzuspalten, wobei auch hier kein Rest bleiben darf. Eine Gleichung vom Grad n kann in maximal n Linearfaktoren zerlegt werden und kann daher auch nicht mehr als n Lösungen haben.

4.7 Bruchgleichungen

4.7.1 Definitionsbereich

Für Terme der Form $\frac{1}{T(x)}$ muss $T(x) \neq 0$ gelten, d.h. der Nennerterm $T(x)$ darf nicht gleich Null sein. Diese Bedingung liefert den Definitionsbereich gemäss

$$T(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D = \ldots$$

4.7.2 Äquivalente Umformung (Beispiel)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{a}{x} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = bx \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{b}$$

d.h. es resultiert eine lineare Gleichung. Bruchgleichungen können häufig auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.

4.8 Wurzelgleichungen

4.8.1 Definitionsbereich für gerade Wurzelexponenten

Für Terme der Form $\sqrt{T(x)}$, oder allgemein $\sqrt[2n]{T(x)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, muss $T(x) \geq 0$ gelten, d.h. der Radikand $T(x)$ darf nicht negativ sein. Diese Bedingung liefert den Definitionsbereich gemäss

$$T(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D = \ldots$$

4.8.2 Nicht-äquivalente Umformung (Beispiel 1)

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$\sqrt{x} = a \quad \Rightarrow \quad x = a^2$$

d.h. es resultiert eine lineare Gleichung. Wurzelgleichungen können häufig auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.

Beachte, dass Quadrieren im Allg. **keine** äquivalente Umformung ist, es können sogenannte Scheinlösungen entstehen. Diese entstehen genau dann, wenn in obiger Gleichung $a < 0$ gilt, denn der Wurzelwert $\sqrt{x}$ kann nie negativ sein. Bei solchen Umformungen müssen die möglichen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt werden (siehe Punkt 4 im Unterabschnitt 4.1).

In der wichtigen Tabelle im Unterabschnitt 4.13 sind äquivalente und nicht-äquivalente Umformungen aufgelistet.

4.8.3 Definitionsbereich für ungerade Wurzelexponenten

Da eine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten, d.h. $\sqrt[3]{T(x)}$ oder allgemein $\sqrt[2n+1]{T(x)}$ mit $n \in \mathbb{N}$, auch aus negativen Zahlen gezogen werden kann, gilt immer $D = \mathbb{R}$.

4.8.4 Äquivalente Umformung (Beispiel 2)

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt[3]{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a^3$$

d.h. es resultiert eine lineare Gleichung. Auch solche Wurzelgleichungen können häufig auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.

In der wichtigen Tabelle im Unterabschnitt 4.13 sind äquivalente und nicht-äquivalente Umformungen aufgelistet.

4.9 Logarithmusgleichungen

4.9.1 Definitionsbereich

Für Terme der Form $log_b(T(x))$ muss $T(x) > 0$ gelten, d.h. der Numerus $T(x)$ muss positiv sein. Diese Bedingung liefert den Definitionsbereich gemäss

$$T(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad D = \ldots$$

4.9.2 Äquivalente Umformung (Beispiel)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0, b \neq 1$ und $x \in D = \mathbb{R}^+$ gilt

$$\log_b(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = b^a$$

d.h. es resultiert eine lineare Gleichung. Logarithmusgleichungen können häufig auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden. Das Gesetz, welches hier angewendet wird, entspricht L1 aus dem Abschnitt 2.10 und kann dazu verwendet werden, eine gesuchte Grösse x aus dem Logarithmus heraus zu bekommen.

4.10 Exponentialgleichungen

Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$a = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(a)$$

d.h. es resultiert eine lineare Gleichung. Exponentialgleichungen können häufig auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden. Das Gesetz, welches hier angewendet wird, entspricht L1 aus dem Abschnitt 2.10 und kann dazu verwendet werden, eine gesuchte Grösse x aus dem Exponenten runter zu bekommen.

4.11 Betragsgleichungen

4.11.1 Abstand vom Ursprung auf der Zahlengerade

Für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm a$$

wobei man die Zahl $a \geq 0$ als Abstand auffassen kann und x für jene Zahlen steht, welche vom Ursprung auf der Zahlengerade diesen Abstand haben.

4.11.2 Abstand von einer Zahl b auf der Zahlengerade

Für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, $b \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$|x - b| = a \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = b \pm a$$

wobei man die Zahl $a \geq 0$ wieder als Abstand auffassen kann und x für jene Zahlen steht, welche von der Zahl b auf der Zahlengerade diesen Abstand haben.

4.12 Substitutionen

4.12.1 Vorgehen

Schrittweises Vorgehen um Gleichungen mit Hilfe von Substitution zu lösen:

1. Mit Hilfe einer geeigneten Substitution aus den untenstehenden Tabellen die gegebene „komplizierte“ Gleichung in x zu einer neuen Gleichung in z vereinfachen.
2. Für diese neue „einfachere“ Gleichung mögliche Zwischenlösung(en) für z bestimmen.
3. Aus den Zwischenlösungen für z mit Hilfe der vorbestimmten Rücksubstitution die gesuchten Lösungen für x bestimmen.

Es ist zu beachten, dass je nach gewählter Substitution, nicht aus jeder Zwischenlösung z auch eine oder mehrere Lösung(en) für x bestimmt werden kann. So sind z.B. für die Substitution $z = x^2$ keine negativen Zwischenlösungen möglich, da ja in jedem Fall $x^2 \geq 0$ gilt.

4.12.2 Addition, Subtraktion, Quadrate, Beträge und Wurzeln

Substitution	Rücksubstitution
$z = x + d$	$x = z - d$
$z = x^2$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{z}$
$z = x^2 + d$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{z - d}$
$z = \lvert x \rvert$	$x_{1,2} = \pm z$
$z = \lvert x + d \rvert$	$x_{1,2} = \pm z - d$
$z = \sqrt{x}$	$x = z^2$

4.12.3 Logarithmen mit Basis b

Siehe Abschnitt 2.10 für zulässige Basen b.

Substitution	Rücksubstitution
$z = \log_b(x)$	$x = b^z$
$z = b^x$	$x = \log_b(z)$

4.12.4 Logarithmen mit speziellen Basen

Substitution	Rücksubstitution
$z = \lg(x)$	$x = 10^z$
$z = 10^x$	$x = \lg(z)$
$z = \ln(x)$	$x = e^z$
$z = e^x$	$x = \ln(z)$
$z = \operatorname{lb}(x)$	$x = 2^z$
$z = 2^x$	$x = \operatorname{lb}(z)$

4.13 Isolieren von Termen in einfachen Gleichungen

4.13.1 Bemerkungen

- Es geht hier um äquivalente Umformungen, welche die Lösungsmenge L nicht verändern.
- Von einer einfachen Gleichung spricht man, wenn die Unbekannte x nur einmal vorhanden ist. Man kann in jeder einfachen Gleichung die Unbekannte x systematisch isolieren, wobei jeder einzelne Schritt von der Struktur der Gleichung abhängt. Die wichtigsten Fälle sind in den folgenden Unterabschnitten zusammengestellt.
- Mit $T(x)$ bezeichnen wir jeweils den Term, der die Unbekannte x enthält, R und S sind Terme, welche die Unbekannte x nicht enthalten und damit konstant sind.

4.13.2 Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

	Ursprüngliche Gleichung	Bedingung	Äquivalente Gleichung
Ä 1	$T(x) - R = S$	-	$T(x) = S + R$
Ä 2	$T(x) + R = S$	-	$T(x) = S - R$
Ä 3	$T(x) \cdot R = S$	$R \neq 0$	$T(x) = \frac{S}{R}$
Ä 4	$\frac{T(x)}{R} = S$	$R \neq 0$	$T(x) = S \cdot R$
Ä 5	$\frac{R}{T(x)} = S$	$T(x) \neq 0 \wedge S \neq 0$	$T(x) = \frac{R}{S}$

Die obigen Umformungen sind äquivalent, vorausgesetzt man multipliziert nicht mit der Zahl Null.

4.13.3 Terme mit Beträgen

	Ursprüngliche Gleichung	Bedingung	Äquivalente Gleichung
Ä 6	$\lvert T(x)\rvert = R$	$R \geq 0$ $R < 0$	$T(x) = \pm R$ nicht erfüllbar

„Nicht erfüllbar" bedeutet $L = \{\}$ für die ursprüngliche Gleichung, z.B. in $\lvert x\rvert = -2$.

4.13.4 Terme mit Potenzen und Wurzeln

	Ursprüngliche Gleichung	Bedingung	Äquivalente Gleichung
Ä 7	$[T(x)]^g = R$ mit g gerade	$R \geq 0$ $R < 0$	$T(x) = \pm\sqrt[g]{R}$ nicht erfüllbar
Ä 8	$[T(x)]^u = R$ mit u ungerade	-	$T(x) = \sqrt[u]{R}$
Ä 9	$\sqrt[g]{T(x)} = R$ mit g gerade	$R \geq 0 \wedge T(x) \geq 0$ $R < 0$	$T(x) = R^g$ nicht erfüllbar
Ä 10	$\sqrt[u]{T(x)} = R$ mit u ungerade	-	$T(x) = R^u$

„Nicht erfüllbar" bedeutet $L = \{\}$ für die ursprüngliche Gleichung, z.B. in $x^2 = -4$ oder $\sqrt{x} = -2$.

4.13.5 Logarithmische und exponentielle Terme

In diesem Abschnitt gilt $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

	Ursprüngliche Gleichung	Bedingung	Äquivalente Gleichung
Ä 11	$\log_R [T(x)] = S$	$T(x) > 0$	$T(x) = R^S$
Ä 12	$R^{T(x)} = S$	$S > 0$	$T(x) = \log_R(S)$
		$S \leq 0$	nicht erfüllbar

„Nicht erfüllbar" bedeutet $L = \{\}$ für die ursprüngliche Gleichung, z.B. in $2^x = -4$.

4.13.6 Trigonometrische Terme

	Ursprüngliche Gleichung	Bedingung	Äquivalente Gleichung
Ä 13	$\sin [T(x)] = R$	$-1 \leq R \leq 1$	$T(x) = \arcsin(R) + n \cdot 2\pi$ $T(x) = \pi - \arcsin(R) + n \cdot 2\pi$
		$\|R\| > 1$	nicht erfüllbar
Ä 14	$\cos [T(x)] = R$	$-1 \leq R \leq 1$	$T(x) = \pm \arccos(R) + n \cdot 2\pi$
		$\|R\| > 1$	nicht erfüllbar
Ä 15	$\tan [T(x)] = R$	$T(x) \in D$	$T(x) = \arctan(R) + n \cdot \pi$

„Nicht erfüllbar" bedeutet $L = \{\}$ für die ursprüngliche Gleichung, z.B. in $\sin(x) = -2$ oder $\cos(x) = 2$.

Für diese Umformungen gilt $n \in \mathbb{Z}$, womit die Periodizität der trigonometrischen Funktionen gemäss den Abschnitten 6.3 und 8.11 berücksichtigt wird. Wenn man in Grad rechnet, setzt man 180° anstelle von π ein. Die Menge D in der letzten Zeile wird im Abschnitt 8.11 definiert.

5 Komplexe Zahlen

5.1 Imaginäre Einheit und imaginäre Zahlen

Für eine komplexe Zahl $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ gilt $a, b \in \mathbb{R}$ und i nennt man die imaginäre Einheit. Es ist a eine reelle Zahl, welche in der Gaußschen Zahlenebene waagrecht abgetragen wird und $b\,i$ eine imaginäre Zahl, welche senkrecht abgetragen wird. Eine imaginäre Zahl $b\,i$ ist damit eine spezielle komplexe Zahl, nämlich eine mit $a = 0$. Eine reele Zahl ist auch eine spezielle komplexe Zahl, nämlich eine mit $b = 0$. Es gilt daher die Beziehung

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

vergleiche die Tabelle im Unterabschnitt 1.1.

Man definiert $i^2 = -1$ sowie $i^1 = i$ und $i^0 = 1$, d.h. es ist mit den Potenzgesetzen der reellen Zahlen z.B. $i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$ oder $i^5 = i^3 \cdot i^2 = -i \cdot (-1) = i$. Allgemein gelten für $n \in \mathbb{N}_0$ die vier Beziehungen

$$i^{4\,n} = 1, \qquad i^{4\,n+1} = i, \qquad i^{4\,n+2} = -1, \qquad und \qquad i^{4\,n+3} = -i,$$

mit deren Hilfe man Potenzen der imaginären Einheit i reduzieren kann.

5.2 Gegenzahl, konjugiert komplexe Zahl und Betrag

Es sei $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, dann definiert man die folgenden Begriffe.

Realteil	$a = Re(z)$
Imaginärteil	$b = Im(z)$
Gegenzahl	$z \to -z \quad \text{und} \quad -z \to -(-z) = z$
Konjugiert kompl. Zahl	$\bar{z} = a - b\,i$
Betrag	$\lvert z \rvert = \lvert a + b\,i \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Das Bilden der Gegenzahl $-z$ zu einer komplexen Zahl z bedeutet eine Spiegelung am Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene.
- Das Bilden der konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$ zu einer komplexen Zahl z bedeutet eine Spiegelung an der reellen Achse.
- Der Betrag $|z|$ zu einer komplexen Zahl z kann als ihr Abstand zum Ursprung der Gaußschen Zahlenebene aufgefasst werden.

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen, vergleiche den Unterabschnitt 3.1, kann man zwischen zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 keinen Grössenvergleich machen, d.h. die Aussage $z_1 < z_2$ z.B. ergibt keinen Sinn. Die Beträge zweier komplexer Zahlen hingegen kann man vergleichen, d.h. es könnte z.B. $|z_1| < |z_2|$ gelten, womit z_1 näher am Ursprung der Gaußschen Zahlenebene liegt als z_2.

5.3 Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

Addition	$(a + b\,i) + (c + d\,i) = a + c + (b + d)\,i$
Subtraktion	$(a + b\,i) - (c + d\,i) = a - c + (b - d)\,i$
Multiplikation	$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$
Division	$\frac{a+b\,i}{c+d\,i} = \frac{a+b\,i}{c+d\,i} \cdot \frac{c-d\,i}{c-d\,i} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$

Bei der Division zweier komplexer Zahlen wird mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert.

6 Trigonometrie

6.1 Rechtwinkliges Dreieck

Für einen Winkel α mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gelten mit H als Hypotenuse, G als Gegenkathete sowie A als Ankathete die folgenden Formeln.

$\frac{2\pi}{x} = \frac{360^\circ}{\alpha}$	$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$	$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x$
$\sin\alpha = \frac{G}{H}$	$\cos\alpha = \frac{A}{H}$	$\tan\alpha = \frac{G}{A}$
$\alpha = \arcsin\left(\frac{G}{H}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{G}{H}\right)$	$\alpha = \arccos\left(\frac{A}{H}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A}{H}\right)$	$\alpha = \arctan\left(\frac{G}{A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{G}{A}\right)$
$\sin\alpha = \cos\left(90^\circ - \alpha\right)$	$\cos\alpha = \sin\left(90^\circ - \alpha\right)$	$\tan\alpha = \cot\left(90^\circ - \alpha\right)$

Ausserdem gilt der Satz von Pythagoras, d.h. $H = \sqrt{G^2 + A^2}$.

6.2 Schiefwinkliges Dreieck

In einem nicht rechtwinkligen Dreieck darf man die obigen Formeln nicht verwenden sondern muss mit Sinus- und Cosinussatz arbeiten. Der Radius r im Sinussatz ist jener des Umkreises.

Sinussatz	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$
Cosinussatz	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Der Winkel γ im Cosinussatz liegt zwischen den Seiten a und b.

6.3 Trigonometrische Funktionen

Vergleiche auch den wichtigen Abschnitt 8.11, wo Bilder dieser Funktionen zu sehen sind.

6.3.1 Einheitskreis

... kommt noch! Vielleicht, irgendwann ...

6.3.2 Allgemein

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Erstere Beziehung nennt man den trigonometrischen Pythagoras.

6.3.3 Periodizität

Mit $n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Beziehungen, wobei z.B. 360° durch $2\,\pi$ ersetzt werden kann, wenn man mit Radiant anstelle von Grad rechnet.

$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ)$	$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ)$
$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + n \cdot 180^\circ)$	$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + n \cdot 180^\circ)$

6.3.4 Symmetrieeigenschaften 1

Die beiden Beziehungen

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

besagen, dass es im Einheitskreis im allg. zwei Winkel α_1 und α_2 gibt, welche denselben Sinus- bzw. Cosinuswert haben. Für den zweiten Winkel α_2 gilt beim Sinus

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$$

und beim Cosinus

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

vergleiche die äquivalenten Umformungen beim Lösen von Gleichungen im Abschnitt 4.13.6.

6.3.5 Symmetrieeigenschaften 2

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$

6.3.6 Reihen

Hinter den Tasten cos und sin auf dem Taschenrechner stecken die folgenden Reihen, wobei der Winkel x in Radiant eingesetzt werden muss.

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} \pm \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots$$

7 Folgen und Reihen

7.1 Allgemein

Wenn man die Glieder einer reellwertigen Folge

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle,$$

d.h. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ aufsummiert, dann erhält man deren Reihe

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist also z.B.

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad \text{oder} \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

7.2 Arithmetische Folgen und Reihen

Bei einer arithmetischen Folge bilden zwei aufeinander folgende Glieder a_{n-1} und a_n immer dieselbe Differenz $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Folge	rekursive Definition	$a_n = a_{n-1} + d$
Folge	explizite Definition	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Reihe	explizite Definition	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

7.3 Geometrische Folgen und Reihen

Bei einer geometrischen Folge bilden zwei aufeinander folgende Glieder a_{n-1} und a_n immer denselben Quotienten $q \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Folge	rekursive Definition	$a_n = a_{n-1} \cdot q$
Folge	explizite Definition	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Reihe für $n < \infty$	explizite Definition	$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ mit $q \neq 1$
Reihe für $n \to \infty$	explizite Definition	$S_n = a_1 \frac{1}{1-q}$ mit $\lvert q \rvert < 1$

8 Funktionen (Analysis)

8.1 Lineare Funktionen

Siehe Abschnitt 4.3 für das Bestimmen von Nullstellen.

8.1.1 Allgemeine Form

Für alle $m, b \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = mx + b$$

mit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha).$$

Für $m \neq 0$ gilt $y = f(x) \in W = \mathbb{R}$.

- m ist die Steigung und α der Steigungswinkel
- b der y-Achsenabschnitt oder auch das Absolutglied
- Δy und Δx sind Veränderungen in y- bzw. x-Richtung
- $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ sind zwei verschiedene Punkte, welche auf der Gerade liegen

8.1.2 Identität und Proportionalität

Die einfachste lineare Funktion, d.h. jene mit $m = 1$, trägt den Namen *id* für Identität. Ist $m \neq 1$ und $m \neq 0$, spricht man von einer Proportionalität. In beiden Fällen gilt $b = 0$ und man spricht von Ursprungsgeraden. Für $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = id(x) = x \quad \text{bzw.} \quad f(x) = mx$$

und in beiden Fällen $y = f(x) \in W = \mathbb{R}$.

8.1.3 Konstante Funktion

Eine weitere einfache lineare Funktion ist jene mit $m = 0$, d.h. ohne Steigung. Für $k \in \mathbb{R}$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = k$$

und $y = f(x) \in W = \{k\}$. Hier wurde k anstelle von b als Parameter gewählt, um auszudrücken, dass es sich um einen konstanten Wert handelt.

8.1.4 Parallele Geraden

Für zwei parallel verlaufenden Geraden f und g mit $f(x) = m_f \cdot x + b_f$ bzw. $g(x) = m_g \cdot x + b_g$ gilt immer

$$m_f = m_g,$$

d.h. die Steigungen sind gleich und man schreibt dafür $f \,||\, g$.

8.1.5 Normale Geraden

Stehen die beiden Geraden f und g mit $f(x) = m_f \cdot x + b_f$ bzw. $g(x) = m_g \cdot x + b_g$ senkrecht zueinander – man nennt sie dann zueinander normal – gilt immer

$$m_f = -\frac{1}{m_g},$$

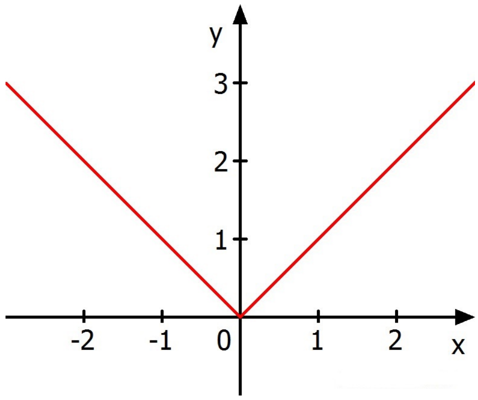
und man schreibt dafür $f \perp g$.

8.2 Betragsfunktionen

Für $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = |x| = \text{abs}(x)$$

und $y = f(x) \in W = \mathbb{R}_0^+$. Die Bezeichnung „abs“ steht für „absolut value“.



Graph der Funktion f mit $f(x) = |x|$

8.3 Potenzfunktionen ...

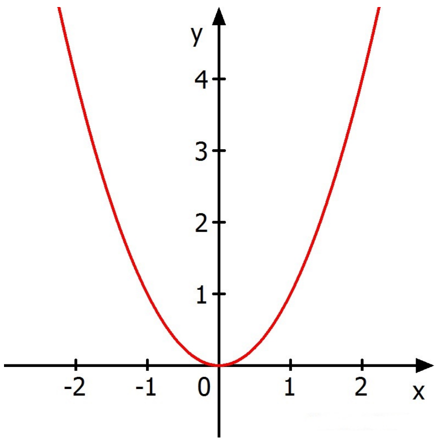
Potenzfunktionen sind von der Form $f(x) = x^n$, wobei der Exponent n nicht unbedingt eine natürliche Zahl sein muss.

8.3.1 ... mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ (Parabeln n-ten Grades)

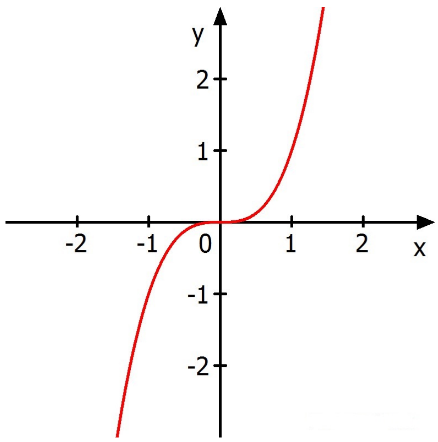
Hier handelt es sich um einfache ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) und es gilt $x \in D = \mathbb{R}$. Die einfachsten Vertreter sind

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3.$$

Es gilt $y = f(x) \in W_f = \mathbb{R}_0^+$ für gerade n, sowie $y = g(x) \in W_g = \mathbb{R}$ für ungerade n.



Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$



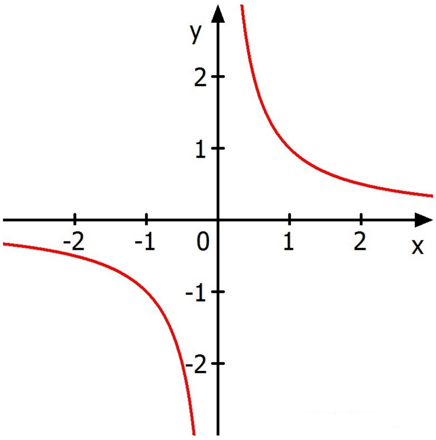
Graph der Funktion g mit $g(x) = x^3$

8.3.2 ... mit $n \in \mathbb{Z}^-$ (Hyperbeln)

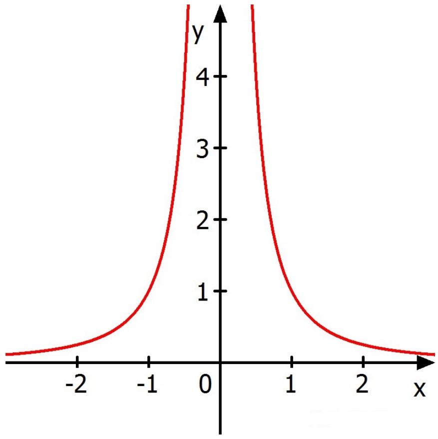
Hier handelt es sich um einfache gebrochenrationale Funktionen und es gilt $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die einfachsten Vertreter sind

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Es gilt $y = f(x) \in W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für ungerade n sowie $y = g(x) \in W_g = \mathbb{R}^+$ für gerade n.



Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$



Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$

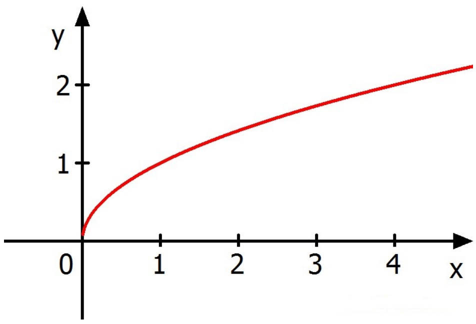
Bei beiden Graphen nennt man die Stelle mit $x = 0$ eine Polstelle, weil dort die Funktionswerte gegen $\pm\infty$ gehen. Mehr dazu im Abschnitt 8.7 über gebrochenrationale Funktionen.

8.3.3 ... mit $n = \frac{1}{m}$ und $m \in \mathbb{N}$ sowie $m \geq 2$ (Wurzelfunktionen)

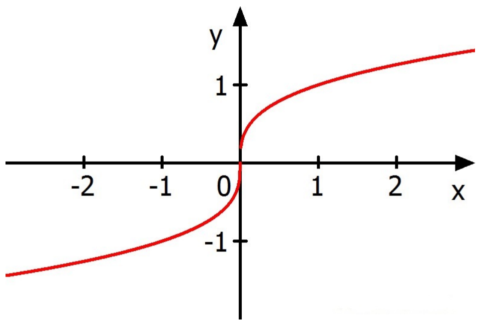
Für $x \in D_f = \mathbb{R}_0^+$ bzw. $x \in D_g = \mathbb{R}$ gilt z.B.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = \text{sqrt}(x) \quad \text{oder} \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

und $y = f(x) \in W_f = \mathbb{R}_0^+$ bzw. $y = g(x) \in W_g = \mathbb{R}$. Die Bezeichnung „sqrt“ steht für „square root“.



Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$



Graph der Funktion g mit $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Wurzelfunktionen sind sogenannte nichtrationale Funktionen.

8.4 Quadratische Funktionen

Siehe Abschnitt 4.4 für das Bestimmen von Nullstellen.

8.4.1 Allgemeine Form

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

a ist der Streckungsfaktor und c das Absolutglied. Mit Hilfe von a kann man Aussagen machen über die Form und Öffnung der Parabel.

- Für $a > 0$ ist die Kurve nach oben und für $a < 0$ nach unten offen.
- Für $|a| > 1$ ist die Kurve gestreckt und für $|a| < 1$ gestaucht (in y-Richtung betrachtet).

Für $b = 0$ ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse, d.h. es gibt keine seitliche Verschiebung. Das Absolutglied c gibt an, wo die y-Achse geschnitten wird, denn es gilt $f(0) = c$.

8.4.2 Normalparabel

Der Graph der einfachsten quadratischen Funktion, d.h. jener mit $a = 1$ und $b = c = 0$, heisst Normalparabel. Sie ist nach oben offen und wegen $|a| = 1$ weder gestreckt, noch gestaucht. Für $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = x^2$$

und $y = f(x) \in W = \mathbb{R}_0^+$, d.h. die Kurve hat bei $(0; 0)$ ihren tiefsten Punkt, ein Minimum.

8.4.3 Sonderform mit $c = 0$, d.h. gemischtquadratisch ohne Absolutglied

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = ax^2 + bx.$$

Diese Parabel hat eine Nullstelle im Koordinatenursprung.

8.4.4 Sonderform mit $b = 0$, d.h. reinquadratisch

Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = ax^2 + c.$$

Diese Parabel ist symmetrisch zur y-Achse. Weil der Scheitelpunkt im Punkt $(0; c)$ liegt, gilt

- $a > 0 \Rightarrow y = f(x) \in W = [\, c; \infty \,[$, d.h. die Kurve hat ein Minimum, bzw.
- $a < 0 \Rightarrow y = f(x) \in W = \,]\, -\infty; c \,]$, d.h. die Kurve hat ein Maximum.

8.4.5 Scheitelpunktform

Für alle $a, x_s, y_s \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s,$$

wobei a derselbe Streckungsfaktor wie bei der allgemeinen Form ist, d.h. man kann Aussagen machen über die Form und Öffnung der Parabel.

Die Koordinaten $(x_s; y_s)$ des Scheitelpunktes S können direkt abgelesen werden und es gilt immer $f(x_s) = y_s$. Für $x_s \neq 0$ gilt immer $f(0) \neq y_s$, d.h. die y-Achse wird im Allgemeinen nicht bei y_s geschnitten. Verglichen mit der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion gilt also im Allgemeinen $y_s \neq c$.

8.4.6 Produktform

Für alle $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

wobei auch hier a derselbe Streckungsfaktor ist wie bei der allgemeinen Form, d.h. man kann Aussagen machen über die Form und Öffnung der Parabel.

Die beiden Nullstellen x_1 und x_2 können direkt abgelesen werden. Die Zerlegung einer quadratischen Funktion f in Linearfaktoren ist genau dann möglich, wenn diese Nullstellen hat.

8.4.7 Warum verschiedenen Formen?

Warum soviele verschiedenen Formen für ein und dieselbe quadratische Funktion?! Jede hat ihre Vorteile:

- Die allgemeine Form liefert mit c den Schnittpunkt mit der y-Achse.
- Liegt die Sonderform mit $b = 0$ vor, weiss man, dass die Kurve nicht seitwärts verschoben ist.
- Liegt die Sonderform mit $c = 0$ vor, weiss man, dass eine Nullstelle bei $x = 0$ liegt.
- Die Scheitelpunktform liefert mit x_s und y_s die Koordinaten des Scheitelpunktes.
- Die Produktform liefert mit x_1 und x_2 die Nullstellen, falls vorhanden.

8.5 Kubische Funktionen

Siehe Abschnitt 4.5 für das Bestimmen von Nullstellen. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

wobei a der Streckungsfaktor und d das Absolutglied ist. Das Absolutglied d gibt an, wo die y-Achse geschnitten wird, denn es gilt $f(0) = d$. Im Abschnitt 8.6.3 sieht man zwei Beispiele für kubische Funktionen, beide mit $d = 0$.

Wählt man für den grössten Exponenten von x eine beliebig grosse natürliche Zahl, kommt man zum Begriff der ganzrationalen Funktionen, auch Polynomfunktionen genannt.

8.6 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

8.6.1 Allgemeine Form

Für $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei a_n der Streckungsfaktor ist und das Absolutglied a_0 angibt wo die y-Achse geschnitten wird, denn es gilt $f(0) = a_0$.

Die konstanten, linearen, quadratischen und kubischen Funktionen sind auch Polynomfunktionen.

8.6.2 Produktform und Anzahl der Nullstellen

Wenn man die obige Summenform $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ z.B. mit Hilfe von Polynomdivision in Linearfaktoren zerlegt, siehe den Abschnitt 4.6, kann man maximal n Linearfaktoren bekommen und schreibt

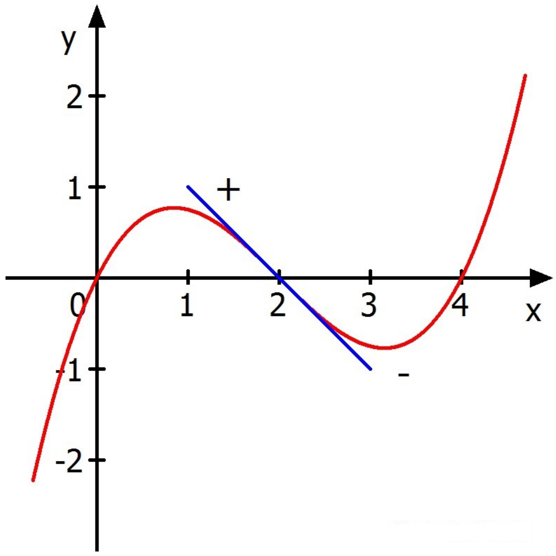
$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_r).$$

Die Produktform liefert die x-Werte $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ mit $r \leq n$, welche für die r Nullstellen stehen.

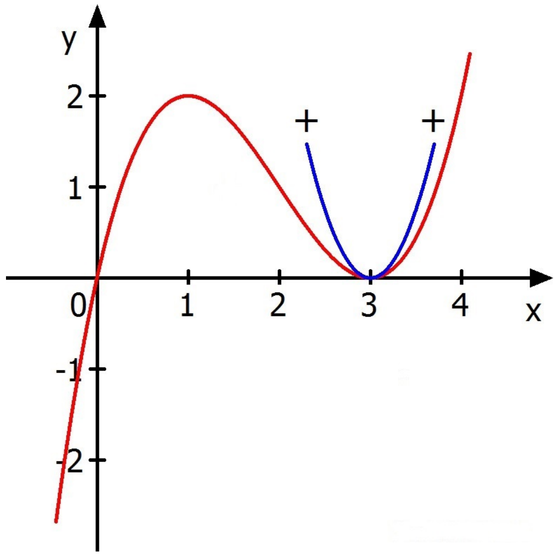
8.6.3 Art der Nullstellen

Es gibt zwei Arten von Nullstellen, denn eine Kurve kann die x-Achse entweder schneiden oder nur berühren.

- Eine Nullstelle **mit** Vorzeichenwechsel (VZW) liegt vor, wenn die x-Achse **geschnitten** wird, denn dort wechselt der y-Wert sein Vorzeichen. Die Kurve verläuft in der Nähe der Nullstelle von unten nach oben oder umgekehrt. Dort verhält sie sich z.B. wie eine lineare Funktion mit Steigung $m > 0$ bzw. $m < 0$.
- Eine Nullstelle **ohne** VZW liegt vor, wenn die x-Achse nur **berührt** wird, denn dort wechselt der y-Wert sein Vorzeichen nicht. Wenn die Kurve von oben kommt und wieder nach oben geht, hat sie bei der Nullstelle ein Minimum. Wenn die Kurve von unten kommt und wieder nach unten geht, hat sie dort ein Maximum. Dort verhält sie sich z.B. wie eine quadratische Funktion mit Streckungsfaktor $a > 0$ bzw. $a < 0$.



Nullstelle **mit** VZW bei $x = 2$



Nullstelle (Minimum) **ohne** VZW bei $x = 3$

8.6.4 Art der Nullstellen (Kriterium)

Im Folgenden wird beschrieben, wie man entscheiden kann, ob es eine Nullstelle mit oder ohne VZW ist.

In der Produktform können einzelne Linearfaktoren auch mehrmals auftreten, wobei man sie zu Potenzen zusammenfasst gemäss

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)^s \cdot (x - x_3)^t \cdot \ldots$$

mit $s, t \in \mathbb{N}$. Wenn ein Exponent ungerade ist, ist es eine Nullstelle mit VZW und für gerade Exponenten eine solche ohne VZW. Bei x_1 wird die x-Achse also geschnitten, bei x_2 nur berührt falls z.B. $s = 2$ oder $s = 4$. Wenn z.B. $t = 3$ oder $t = 5$, dann wäre $(x_3\,;\,0)$ ein Schnittpunkt.

8.6.5 Asymptote

Mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ gilt auch

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \ldots + \frac{a_2}{a_n\, x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n\, x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n\, x^n}\right)$$

und damit für die Asymptote $a(x) = a_n x^n$. Dies weil in der Klammer alle Summanden bis auf die 1 echt gebrochen sind und damit für $x \to \pm\infty$ verschwinden, siehe dazu auch den Abschnitt 9.3.

8.7 Gebrochenrationale Funktionen

Für $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a_m, \ldots, a_0, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$ sowie mit $a_m, b_n \neq 0$ und $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots x_r\}$ mit $r \leq n$ gilt

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)}.$$

Die Absolutglieder a_0 und b_0 geben an, wo die y-Achse geschnitten wird, denn es gilt $f(0) = \frac{a_0}{b_0}$.

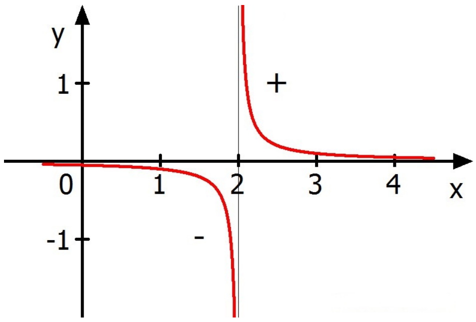
8.7.1 Nullstellen und Polstellen

- Weil das Zählerpolynom $Z(x)$ vom Grad m ist, kann es in höchstens m Linearfaktoren zerlegt werden und kann daher auch maximal m Nullstellen haben.
- Mit demselben Argument kann das Nennerpolynom $N(x)$ maximal n Nullstellen haben, d.h. die Funktion hat maximal n Definitionslücken, siehe oben den Definitionsbereich D mit $1 \leq r \leq n$.

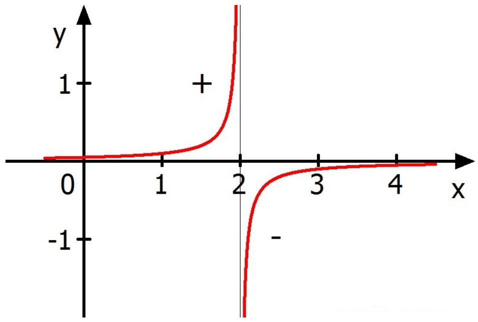
8.7.2 Art der Null- und Polstellen

Für die Art der Nullstellen gelten dieselben Überlegungen wie bei den Polynomfunktionen, denn die Nullstellen werden ja ausschliesslich durch das Zählerpolynom $Z(x)$ verursacht. Es gibt zwei Arten von Polstellen, denn eine Kurve kann bei einer Polstelle das Vorzeichen der y-Werte wechseln oder auch nicht.

- Eine Polstelle **mit** Vorzeichenwechsel (VZW) liegt vor, wenn die Kurve auf der einen Seite des Pols von oben und auf der anderen Seite von unten kommt.

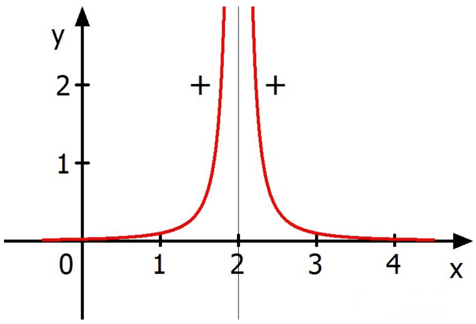


Polstelle **mit** VZW bei $x = 2$

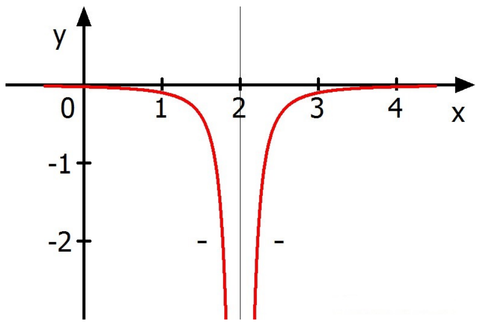


Polstelle **mit** VZW bei $x = 2$

- Eine Polstelle **ohne** VZW liegt vor, wenn die Kurve auf beiden Seiten des Pols von oben oder auf beiden Seiten von unten kommt.



Polstelle **ohne** VZW bei $x = 2$



Polstelle **ohne** VZW bei $x = 2$

8.7.3 Art der Polstellen (Kriterium)

Im Folgenden wird beschrieben, wie man entscheiden kann, ob es eine Polstelle mit oder ohne VZW ist.

In der Produktform des Nennerpolynoms $N(x)$ können einzelne Linearfaktoren auch mehrmals auftreten, wobei man sie zu Potenzen zusammenfasst gemäss

$$f(x) = \frac{\dots}{b_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)^s \cdot (x - x_3)^t \cdot \dots} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit $s, t \in \mathbb{N}$. Wenn ein Exponent ungerade ist, ist es eine Polstelle mit VZW und für gerade Exponenten eine solche ohne VZW.

- Bei x_1 geht die Kurve auf der einen Seite nach oben und auf der anderen nach unten, d.h. x_1 ist eine Polstelle mit VZW.
- Bei x_2 geht die Kurve beidseitig noch oben oder beidseitig nach unten falls z.B. $s = 2$ oder $s = 4$, d.h. x_2 ist eine Polstelle ohne VZW.
- Wenn z.B. $t = 3$ oder $t = 5$, dann findet bei x_3 ein Vorzeichenwechsel der y-Werte statt, d.h. x_3 ist eine Polstelle mit VZW.

8.7.4 Asymptote

Für die Asymptote sind die Exponenten m und n der höchsten Potenzen von $Z(x)$ bzw. $N(x)$ ausschlaggebend.

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \dots}{b_n x^n + \dots} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Es gilt:

- Wenn $n < m$ ist, dann liefert eine Polynomdivision im Allg. einen echt gebrochenen Anteil $d(x)$, welcher für $x \to \pm\infty$ gegen Null geht. Der nicht echt gebrochene Anteil des Resultats der Polynomdivision stellt die Asymptote $a(x)$ dar.
- Wenn $n = m$ ist, dann ist die Asymptote eine konstante Funktion mit $a(x) = \frac{a_m}{b_n}$.
- Wenn $n > m$ ist und f somit bereits echt gebrochen ist, dann ist die x-Achse die Asymptote, d.h. es gilt $a(x) = 0$.

8.8 Gebrochenlineare Funktionen

Für $m = n = 1$ nennt man eine gebrochenrationale Funktion auch eine gebrochenlineare Funktion. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $c \neq 0$ sowie $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ gilt

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{Z(x)}{N(x)},$$

d.h. ein solche Funktion kann je höchstens eine Null- und Polstelle haben. Mit Hilfe einer Polynomdivision und deren Rest R kann man die Funktion f zerlegen in zwei Summanden gemäss

$$f(x) = Z(x) : N(x) = a(x) + \frac{R}{N(x)} = a(x) + d(x),$$

wobei $d(x)$ ein echt gebrochener Anteil ist und daher für grosse x verschwindet. Das Vorzeichen von $d(x)$ besagt, ob die Kurve für $x \to \pm\infty$ oberhalb oder unterhalb der waagrechten Asymptote $a(x) = \frac{a}{c}$ verläuft, es ist z.B.

$$\begin{array}{lllll} x \to +\infty & \Rightarrow & d(x) \to 0^- & \text{oder} & d(x) \to 0^+ \\ x \to -\infty & \Rightarrow & d(x) \to 0^+ & \text{oder} & d(x) \to 0^- \end{array}$$

Dabei bedeutet 0^- unterhalb und 0^+ oberhalb der Asymptote, falls vor dem Summand $d(x)$ ein $+$ steht.

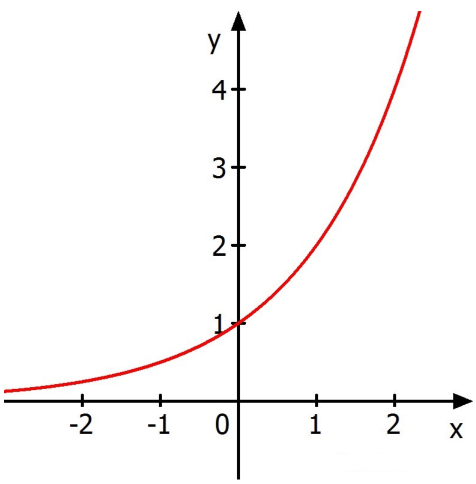
8.9 Exponentialfunktionen

8.9.1 Mit Anfangswert 1

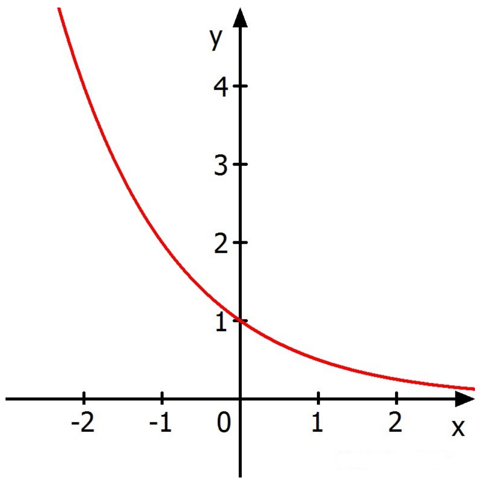
Für $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = b^x = e^{\ln(b) \cdot x}$$

und $y = f(x) \in W = \mathbb{R}^+$. Für $0 < b < 1$ fällt der Graph dieser Funktion und man redet von einer Zerfallsfunktion. Für $b > 1$ steigt der Graph und man redet von einer Wachstumsfunktion, vergleiche dazu auch die Funktionsgraphen im Abschnitt 3.2. Für die Basis $b = e$ schreibt man auch $f(x) = \exp(x)$.



Graph der Funktion f mit $f(x) = 2^x$



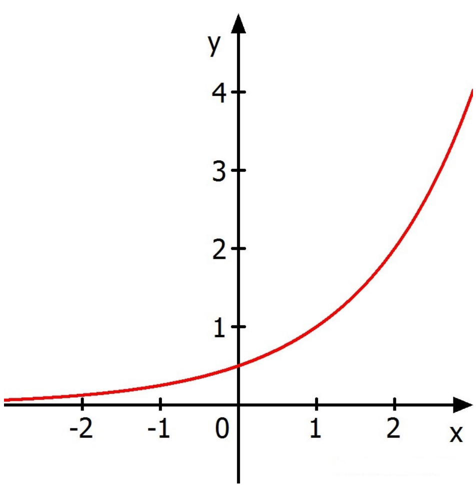
Graph der Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

8.9.2 Mit Anfangswert a

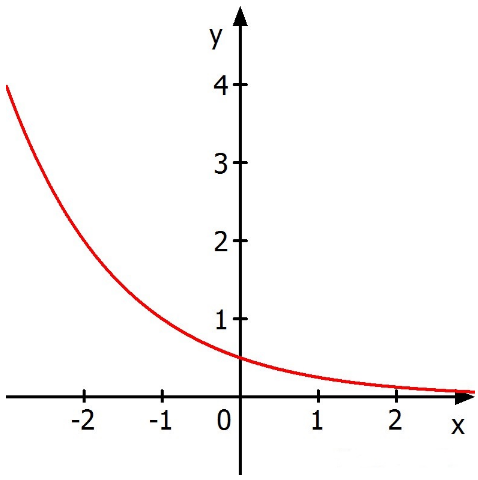
Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ und $x \in D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{\ln(b) \cdot x}$$

und $y = f(x) \in W = \mathbb{R}^+$.



Graph der Funktion f mit $f(x) = 0.5 \cdot 2^x$



Graph der Funktion f mit $f(x) = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Wenn man für a auch negative Werte zulässt, d.h. wenn $a \in \mathbb{R}^-$ gilt, dann ist $y = f(x) \in W = \mathbb{R}^-$.

8.9.3 Kehrwert der Basis

Den Graphen einer Exponentialfunktion kann man wegen

$$b^x = \left(b^{-1}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x}$$

an der y-Achse spiegeln, indem man den Kehrwert der Basis b als neue Basis nimmt. Vergleiche dazu auch den Abschnitt 9.1.8 mit $f(-x)$.

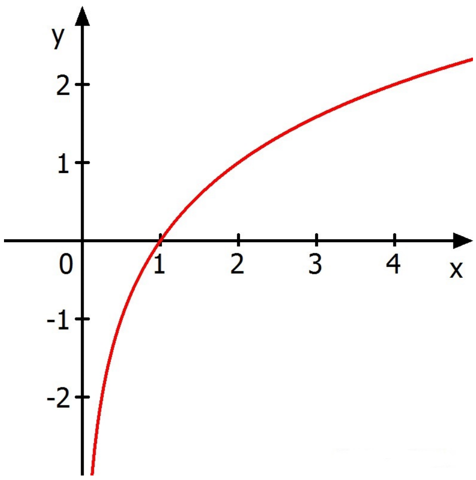
8.10 Logarithmusfunktionen

8.10.1 Allgemein

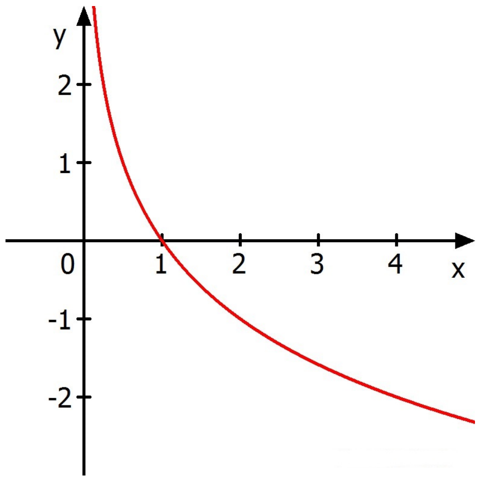
Für $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ und $x \in D = \mathbb{R}^+$ gilt

$$f(x) = \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

und $y = f(x) \in W = \mathbb{R}$.



Graph der Funktion f mit $f(x) = \log_2(x)$



Graph der Funktion f mit $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

8.10.2 Kehrwert der Basis

Den Graphen einer Logarithmusfunktion kann man wegen

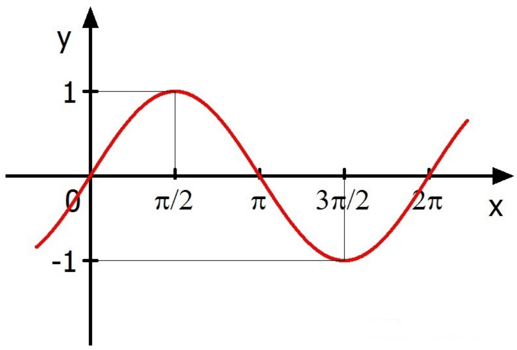
$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)}{-\ln(\frac{1}{b})} = -\log_{\frac{1}{b}}(x)$$

an der x-Achse spiegeln, indem man den Kehrwert der Basis b als neue Basis nimmt. Vergleiche dazu auch den Abschnitt 9.1.7 mit $-f(x)$.

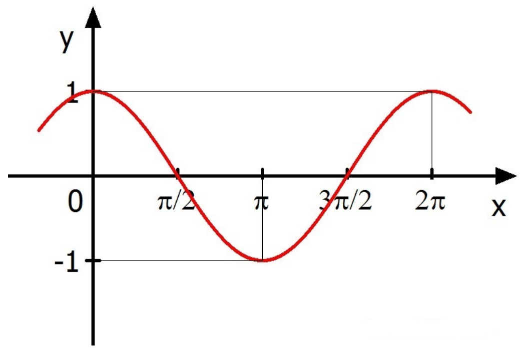
8.11 Trigonometrische Funktionen

f	D	W	M_N	M_P	p
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	$\{z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	–	2π
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	$\{\frac{\pi}{2} + z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	–	2π
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\{z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	$\{\frac{\pi}{2} + z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	π
$\cot(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\{\frac{\pi}{2} + z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	$\{z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$	π

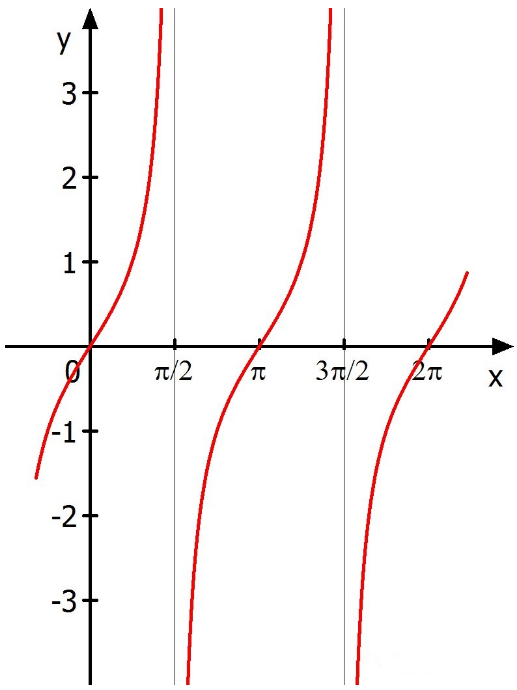
Die Bezeichnung M_N steht für die Menge der Nullstellen, M_P für jene der Polstellen und p für die Periodenlänge. Siehe auch den Abschnitt 6.3 zu den Themen Einheitskreis, Periodizität und Symmetrie von trigonometrischen Funktionen.



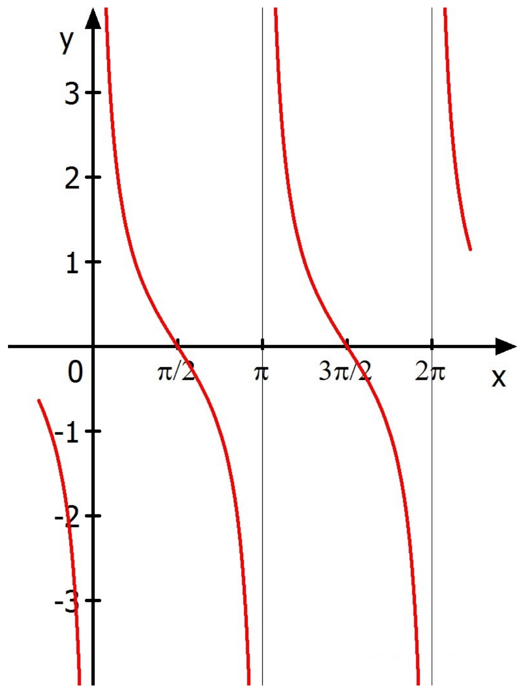
Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$



Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$



Graph der Funktion f mit $f(x) = \tan(x)$



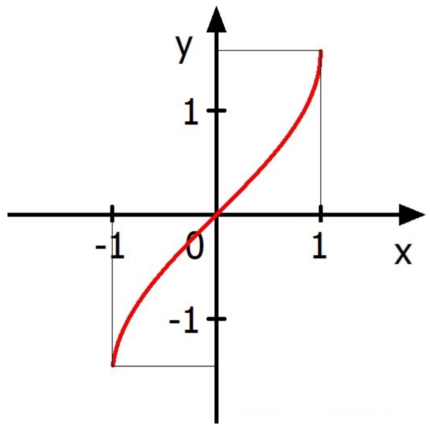
Graph der Funktion f mit $f(x) = \cot(x)$

8.12 Arkusfunktionen

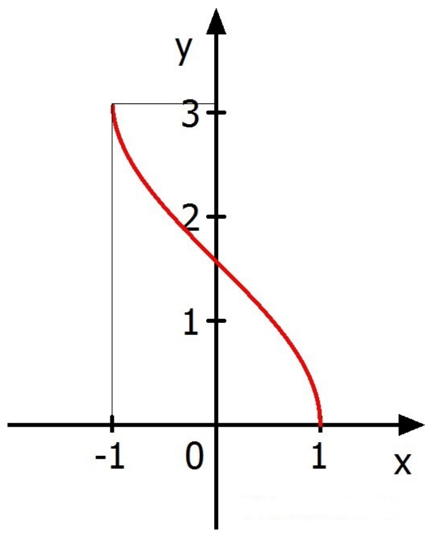
Wenn man die Definitionsbereiche der trigonometrischen Funktionen auf bestimmte Intervalle einschränkt, sind sie umkehrbar.

f	D	W	M_N	$f(0)$
$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ bzw. $[-90°;90°]$	$\{0\}$	0
$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$ bzw. $[0°;180°]$	$\{1\}$	$\frac{\pi}{2}$ bzw. $90°$
$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ bzw. $]-90°;90°[$	$\{0\}$	0

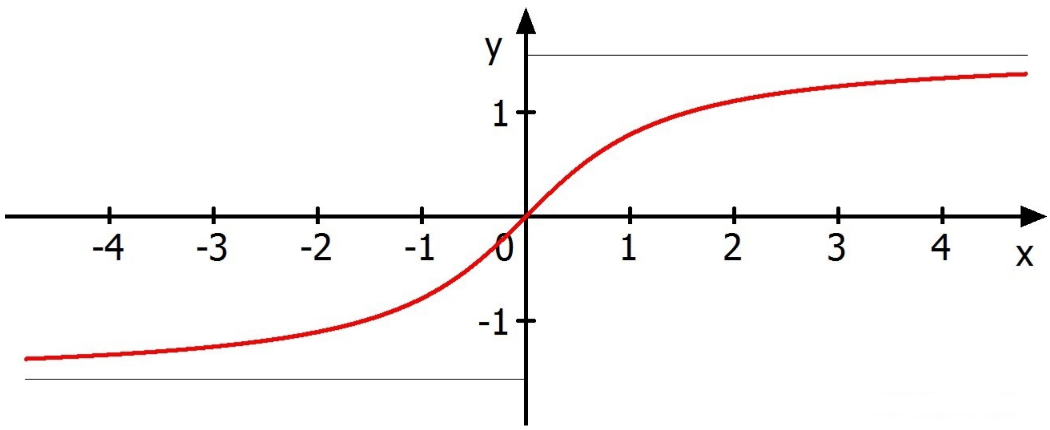
Die Bezeichnung M_N steht für die Menge der Nullstellen. Vergleiche auch mit den äquivalenten Umformungen für trigonometrische Funktionen in den letzten drei Zeilen der Tabelle im Abschnitt 4.13.



Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin^{-1}(x)$



Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos^{-1}(x)$



Graph der Funktion f mit $f(x) = \tan^{-1}(x)$

9 Funktionseigenschaften

9.1 Transformationen

Alles in diesem Abschnitt Gesagte stimmt für beliebige Funktionen f und es gelte $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siehe auch den Abschnitt 9.1.9, wo ein Überblick über die verschiedenen Transformationen und ihre Wirkung gegeben wird.

9.1.1 Verschiebung in x-Richtung

Wenn man in einer Funktionsgleichung konsequent jedes x durch die Summe $x + a$ ersetzt, d.h.

$$f(x + a)$$

bildet, bewirkt das eine Verschiebung in x-Richtung.

- $a > 0 \rightarrow$ nach links
- $a < 0 \rightarrow$ nach rechts

Mit $f(x) = x^2$ steht $g(x) = f(x + 3) = (x + 3)^2$ für eine um 3 nach links verschobene Normalparabel.

9.1.2 Verschiebung in y-Richtung

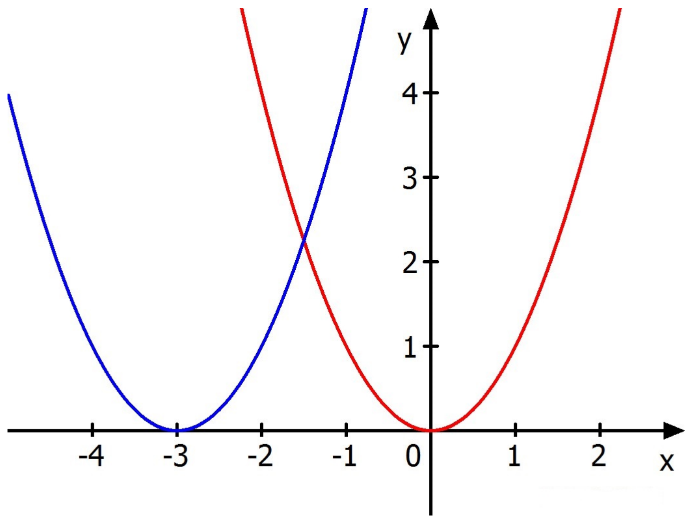
Wenn man zu einer Funktionsgleichung etwas dazu addiert, d.h.

$$f(x) + b$$

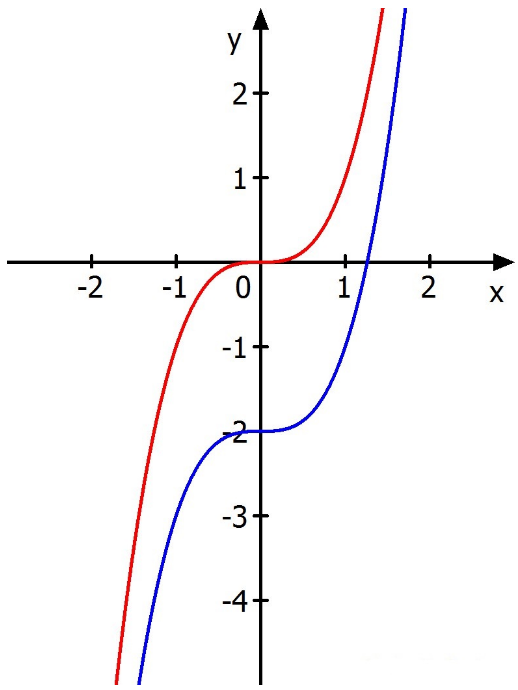
bildet, bewirkt das eine Verschiebung in y-Richtung.

- $b > 0 \rightarrow$ nach oben
- $b < 0 \rightarrow$ nach unten

Mit $f(x) = x^3$ steht $g(x) = f(x) - 2 = x^3 - 2$ für eine um 2 nach unten verschobene Parabel 3. Ordnung.



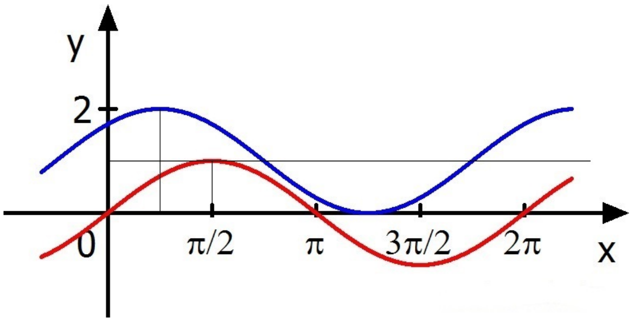
$f(x) = x^2$ und $g(x) = f(x + 3) = (x + 3)^2$



$f(x) = x^3$ und $g(x) = f(x) - 2 = x^3 - 2$

9.1.3 Verschiebung in x- und y-Richtung

Mit $f(x) = \sin(x)$ steht z.B. $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ für eine um $\frac{\pi}{4}$ nach links und um 1 nach oben verschobene Sinuskurve.



$f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Wie man sieht, bedeutet die Transformation „$+1$“ wie erwartet eine Verschiebung der Kurve nach **oben**, die Transformation „$+\frac{\pi}{4}$“ aber eine Verschiebung nach **links**!

9.1.4 Streckung oder Stauchung in x-Richtung

Wenn man in einer Funktionsgleichung konsequent jedes x durch das Produkt $c \cdot x$ ersetzt, d.h.

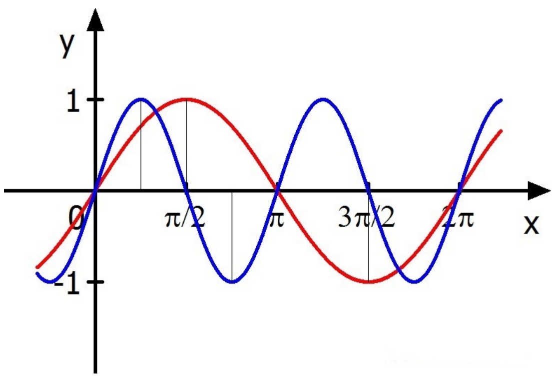
$$f(c \cdot x)$$

bildet, bewirkt das eine Streckung oder Stauchung in x-Richtung.

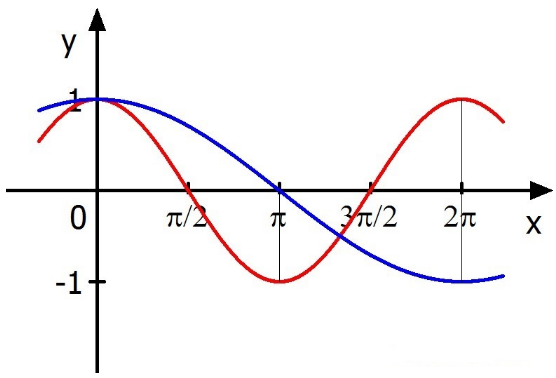
- $0 < c < 1 \rightarrow$ Streckung
- $c > 1 \rightarrow$ Stauchung

Beispiele:

- Mit $f_1(x) = \sin(x)$ steht z.B. $g_1(x) = f_1(2\,x) = \sin(2\,x)$ für eine um Faktor 2 gestauchte Sinuskurve. Die Kurve hat somit doppelte „Frequenz“ und benötigt für eine ganze Schwingung nur π anstatt 2π.
- Mit $f_2(x) = \cos(x)$ steht z.B. $g_2(x) = f_2(0.5\,x) = \cos(0.5\,x)$ für eine um Faktor 2 gestreckte Cosinuskurve. Die Kurve hat somit halbe „Frequenz“ und benötigt für eine ganze Schwingung 4π anstatt 2π.



$f_1(x) = \sin(x)$ und $g_1(x) = f_1(2\,x) = \sin(2\,x)$



$f_2(x) = \cos(x)$ und $g_2(x) = f_2(0.5\,x) = \cos(0.5\,x)$

9.1.5 Streckung oder Stauchung in y-Richtung

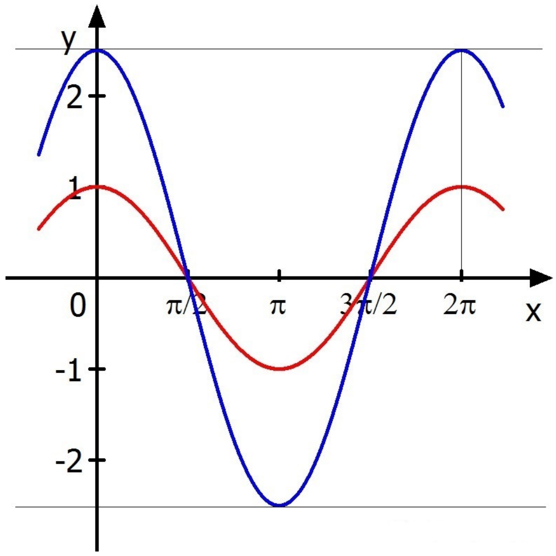
Wenn man zu einer Funktionsgleichung etwas dazu multipliziert, d.h.

$$d \cdot f(x)$$

bildet, bewirkt das eine Streckung oder Stauchung in y-Richtung.

- $d > 1 \rightarrow$ Streckung
- $0 < d < 1 \rightarrow$ Stauchung

Mit $f(x) = \cos(x)$ steht z.B. $g(x) = 2.5 \cdot f(x) = 2.5 \cdot \cos(x)$ für eine um Faktor 2.5 gestreckte Cosinuskurve, d.h. diese hat den Wertebereich $W = [-2.5; 2.5]$.



$f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2.5 \cdot f(x) = 2.5 \cdot \cos(x)$

9.1.6 Beispiele zu Verschiebung und Streckung bzw. Stauchung

Die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korrespondieren mit jenen der vorhergehenden fünf Unterabschnitte.

- Aus der Wurzelfunktion
$$f(x) = \sqrt{x},$$
welche weder verschoben, noch gestreckt oder gestaucht ist, wird
$$g(x) = d \cdot \sqrt{c \cdot x + a} + b = d \cdot \sqrt{c \cdot \left(x + \frac{a}{c}\right)} + b.$$
- Aus der Sinusfunktion
$$f(x) = \sin(x),$$
welche weder verschoben, noch gestreckt oder gestaucht ist, wird
$$g(x) = d \cdot \sin(c \cdot x + a) + b = d \cdot \sin\left(c \cdot \left(x + \frac{a}{c}\right)\right) + b.$$
- Aus der Exponentialfunktion
$$f(x) = e^x,$$
welche weder verschoben, noch gestreckt oder gestaucht ist, wird
$$g(x) = d \cdot e^{c \cdot x + a} + b = d \cdot e^{c \cdot \left(x + \frac{a}{c}\right)} + b.$$

In allen drei Fällen beträgt die Verschiebung in x-Richtung wegen $c \cdot x + a = c \cdot \left(x + \frac{a}{c}\right)$ nicht a, sondern $\frac{a}{c}$, d.h. um die Verschiebung abzulesen, muss man zuerst den Faktor c ausklammern.

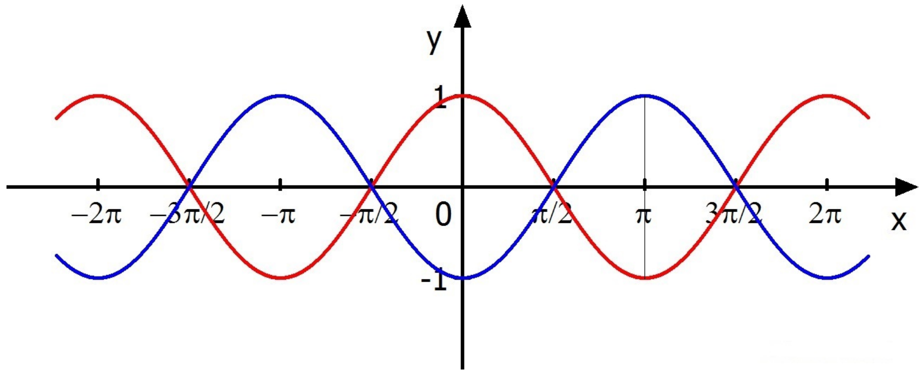
9.1.7 Spiegelung an der x-Achse

Wenn man vor eine Funktionsgleichung ein Minus schreibt, d.h.

$$-f(x)$$

bildet, bewirkt das eine Spiegelung an der x-Achse. Dies weil $f(x)$ ein y-Wert ist und wenn man dessen Vorzeichen wechselt, wird oben und unten vertauscht.

Mit $f(x) = \cos(x)$ steht $g(x) = -f(x) = -\cos(x)$ für eine an der x-Achse gespiegelte Cosinuskurve, d.h. es gilt z.B. $f(\pi) = -1$ und $g(\pi) = -f(\pi) = -(-1) = 1$.



$f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = -f(x) = -\cos(x)$

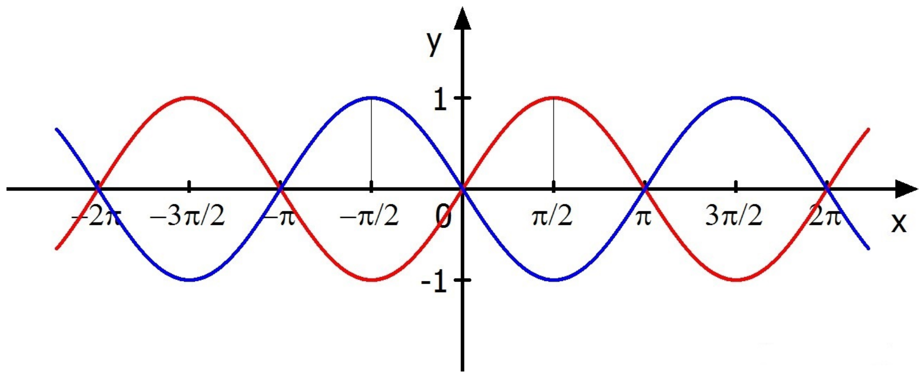
9.1.8 Spiegelung an der y-Achse

Wenn man in einer Funktionsgleichung konsequent jedes x durch $-x$ ersetzt, d.h.

$$f(-x)$$

bildet, bewirkt das eine Spiegelung an der y-Achse. Dies weil bei einem Vorzeichenwechsel des x-Werts links und rechts vertauscht wird.

Mit $f(x) = \sin(x)$ steht $g(x) = f(-x) = \sin(-x)$ für eine an der y-Achse gespiegelte Sinuskurve, d.h. es gilt z.B. $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $g(-\frac{\pi}{2}) = f(-(-\frac{\pi}{2})) = 1$.



$f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = f(-x) = \sin(-x)$

Wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ hat bei der Sinusfunktion eine Spiegelung an der y-Achse dieselbe Wirkung wie jene an der x-Achse.

9.1.9 Überblick

Wenn man die Zuordnungsvorschrift $f(x)$ einer Funktion f verändert, d.h. eine Transformation von f vornimmt, dann hat das immer eine Auswirkung auf deren Graphen $G(f)$. Dieser Abschnitt soll einen Überblick darüber geben, mit welcher Transformation man welche Wirkung erzielen kann und der nächste Abschnitt zeigt ein Beispiel aus der Elektrotechnik, wo alle vier Transformationen angewendet werden.

Transformation	Veränderung von $f(x)$	Wirkung auf $G(f)$	Abschnitt
$f(x+a)$	Summand beim x	Verschiebung in x-Richtung	9.1.1
$f(x)+b$	Summand beim y	Verschiebung in y-Richtung	9.1.2
$f(x+a)+b$	Summand beim x und y	Verschiebung in beide Richtungen	9.1.3
$f(c \cdot x)$	Faktor beim x	Streckung in x-Richtung	9.1.4
$d \cdot f(x)$	Faktor beim y	Streckung in y-Richtung	9.1.5
$d \cdot f(c \cdot x+a)+b$	alle 4 Transformationen	alle 4 Wirkungen	9.1.6
$-f(x)$	Faktor -1 beim y	Spiegelung an der x-Achse	9.1.7
$f(-x)$	Faktor -1 beim x	Spiegelung an der y-Achse	9.1.8

Für $c > 1$ bzw. $0 < d < 1$ spricht man von Stauchung anstelle von Streckung. Die letzten beiden Transformationen $f(-x)$ und $-f(x)$ könnte man mit $c = d = -1$ auch als $f(c \cdot x)$ bzw. $d \cdot f(x)$ schreiben.

9.1.10 Anwendung (Harmonische Schwingung)

Von einer harmonischen Schwingung spricht man, wenn ihr Verlauf durch eine Sinusfunktion dargestellt werden kann, siehe dazu Wikipedia unter dem Stichwort „Harmonische Schwingungen“. Als Beispiel aus der Physik dient hier die momentane Stromstärke i in Abhängigkeit der Zeit t gemäss

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + i_0$$

und die folgende Tabelle zeigt die Analogie zur Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = d \cdot \sin(c \cdot x + a) + b$$

aus der Mathematik.

Physik	Bedeutung	Einheit	Math
i od. $i(t)$	Momentane Stromstärke	A	y od. $f(x)$
t	Zeit	s	x
$\hat{i}$	Amplitude der Stromstärke	A	d
ω	Kreisfrequenz	1/s	c
φ_0	Nullphasenwinkel	rad	a
i_0	Anteil Gleichstrom	A	b

Wegen $\omega = 2\,\pi\, f$ und $T = 1/f$ gilt mit der Frequenz f oder der Periode T auch

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\,\sin(\omega\, t + \varphi_0) + i_0 \\ &= \hat{i}\,\sin(2\,\pi\, f\, t + \varphi_0) + i_0 \\ &= \hat{i}\,\sin\left(2\,\pi\,\frac{t}{T} + \varphi_0\right) + i_0 \end{aligned}$$

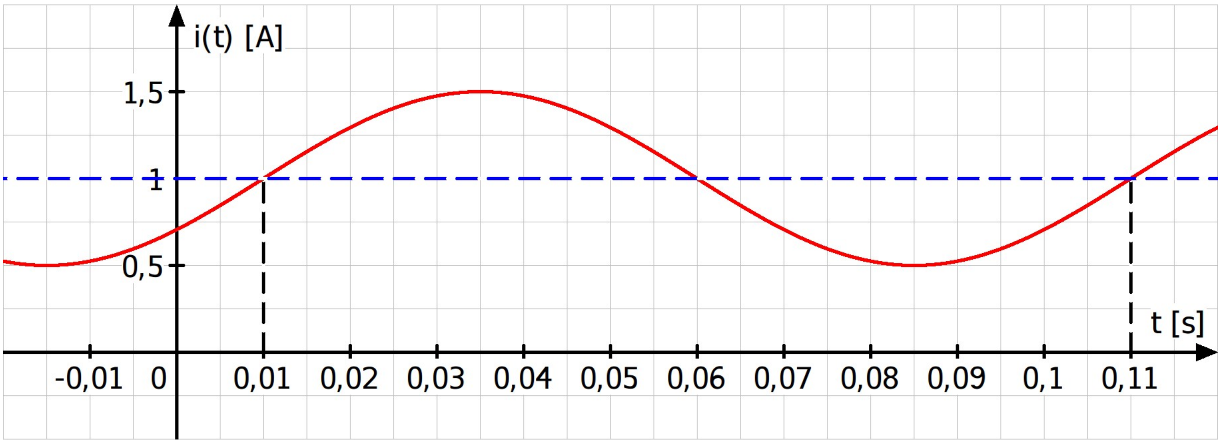
und die folgende Tabelle zeigt wieder die Analogie.

Symbol	Bedeutung	Einheit	Math
f	Frequenz	1/s	$\frac{c}{2\pi}$
T	Periode	s	$\frac{2\pi}{c}$

Die momentane Stromstärke i gemäss

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega\, t + \varphi_0) + i_0$$

kann in einem i-t-Diagramm dargestellt werden, wobei hier $f = 10\frac{1}{s}$ gilt für die Frequenz.



Die Funktion $i(t) = 0.5A \cdot \sin\left(2\pi \cdot 10\frac{1}{s} \cdot t - 0.628\right) + 1A$

Die folgenden Transformationen sind gut ersichtlich aus der Grafik oder Zuordnungsvorschrift:

- Verschiebung in i-Richtung um $i_0 = 1A$
- Stauchung in i-Richtung mit $\hat{\imath} = 0.5A$
- Stauchung in t-Richtung mit $\omega = 2\pi \cdot 10\frac{1}{s} \approx 62.8\frac{1}{s}$

Die Verschiebung in t-Richtung kann nicht $\varphi_0 = -0.628$ Radiant betragen, da die t-Achse die Zeitachse ist und somit in Sekunden skaliert ist. Wie im Abschnitt 9.1.6 beschrieben, muss man den Faktor vor der unabhängigen Variable ausklammern gemäss

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{\imath} \cdot \sin(\omega\, t + \varphi_0) + i_0 \\ &= \hat{\imath} \cdot \sin\left(\omega\,\left(t + \frac{\varphi_0}{\omega}\right)\right) + i_0 \end{aligned}$$

und damit wird der Graph von i wegen

$$\frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{-0.628}{2\pi \cdot 10\frac{1}{s}} \approx \frac{-0.628}{62.8\frac{1}{s}} = -0.01s$$

um $0.01s$ nach rechts verschoben, siehe oben.

9.1.11 Periodenlänge bei trigonometrischen Funktionen

Die letzte Zeile in obiger Tabelle ist eine Anleitung, wie man die Periodenlänge x_p der Funktion $\sin(c\,x)$ und $\cos(c\,x)$ berechnen kann. Es gilt

$$c\,x_p = 2\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad x_p = \frac{2\,\pi}{c}$$

9.2 Symmetrien

9.2.1 Achssymmetrie bezüglich der y-Achse

Funktionen, welche bezüglich der y-Achse symmetrisch sind, nennt man gerade Funktionen und es gilt

$$f(-x) = f(x)$$

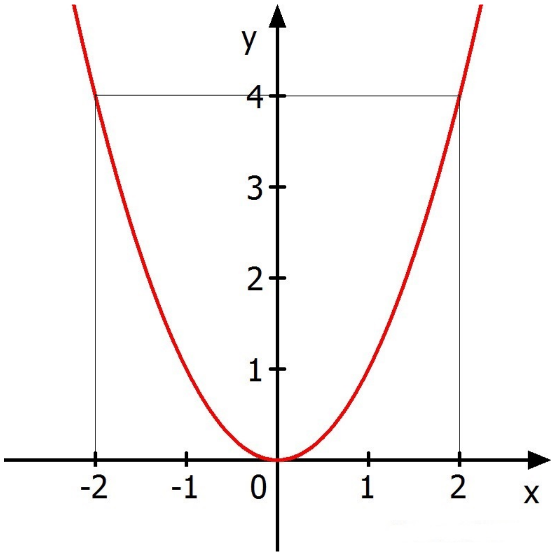
für alle $x \in D$. Beispiele dafür sind

$$f(x) = c, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = \cos(x), \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = |x|$$

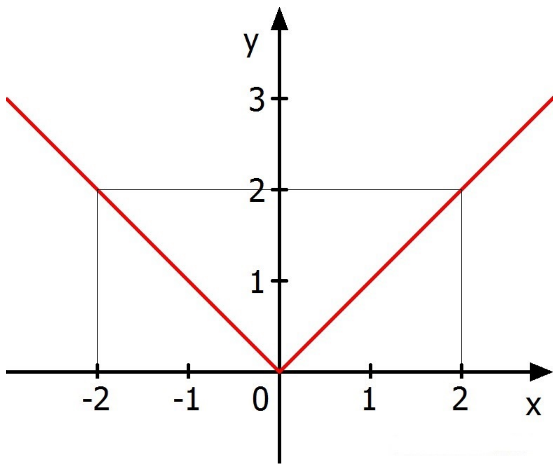
und alle Polynomfunktionen mit ausschliesslich geraden Exponenten, d.h.

$$f(x) = \ldots + a_8 \cdot x^8 + a_6 \cdot x^6 + a_4 \cdot x^4 + a_2 \cdot x^2 + a_0$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$ für $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$



$f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$



$f(-2) = |-2| = 2 = |2| = f(2)$

Mit der folgenden Rechnung kann man z.B. beweisen, dass die Funktion f mit $f(x) = x^2$ eine gerade Funktion ist.

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$

Mit einer Formel aus Abschnitt 6.3.6 kann man denselben Beweis für die Funktion f mit $f(x) = \cos x$ liefern.

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \cos(-x)$$

9.2.2 Punktsymmetrie bezüglich dem Koordinatenursprung

Funktionen, welche bezüglich dem Koordinatenursprung symmetrisch sind, nennt man ungerade Funktionen und es gilt

$$f(-x) = -f(x)$$

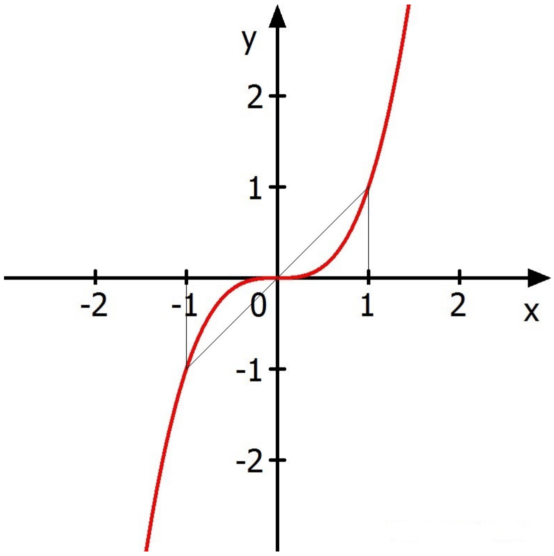
für alle $x \in D$. Beispiele dafür sind

$$f(x) = x, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \sin(x), \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \tan^{-1}(x)$$

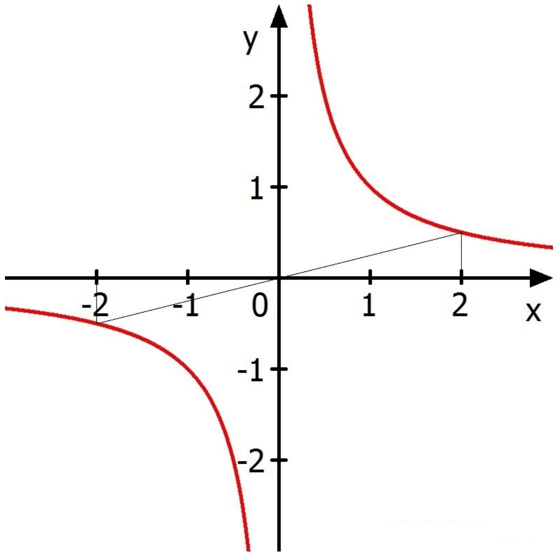
und alle Polynomfunktionen mit ausschliesslich ungeraden Exponenten, d.h.

$$f(x) = \ldots + a_7 \cdot x^7 + a_5 \cdot x^5 + a_3 \cdot x^3 + a_1 \cdot x$$

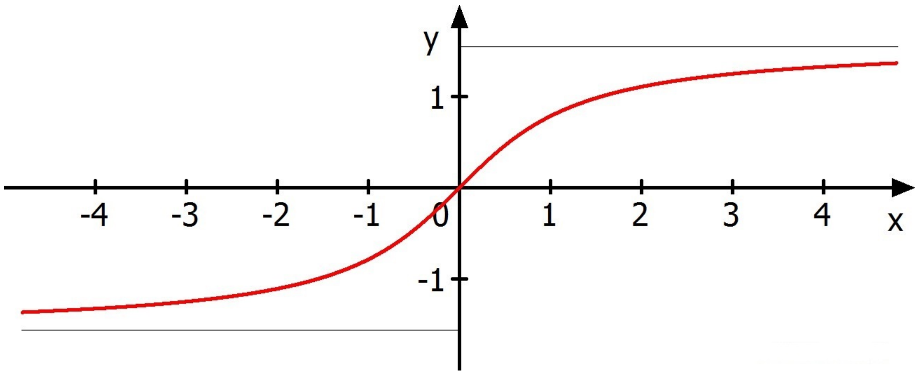
mit $a_n \in \mathbb{R}$ für $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$



$f(-1) = (-1)^3 = -1 = -1^3 = -f(1)$



$f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -f(2)$



$f(-1) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} = -\tan^{-1}(1) = -f(1)$ wobei gilt $\frac{\pi}{4} \approx 0.79$

Mit der folgenden Rechnung kann man z.B. beweisen, dass die Funktion f mit $f(x) = x^3$ eine ungerade Funktion ist.

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3\,x^3 = -x^3 = -f(x)$$

9.3 Grenzwerte

Es gelten in diesem Abschnitt die folgenden Schreibweisen:

- $x \to \pm\infty$ bedeutet, dass sich x dem Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ nähert und man sagt dafür auch „x geht gegen $\pm$ Unendlich“.
- $x \uparrow 0$ bedeutet, dass sich x von unten (und damit von links) her dem Wert 0 nähert.
- $x \downarrow 0$ bedeutet, dass sich x von oben (und damit von rechts) her dem Wert 0 nähert.
- $f(x) \to 0^-$ bedeutet, dass der Funktionswert verschwindend klein wird und negativ ist.
- $f(x) \to 0^+$ bedeutet, dass der Funktionswert verschwindend klein wird und positiv ist.

9.3.1 Verhalten im Grossen (d.h. für $x \to \pm\infty$)

Mit der umgekehrten Proportionalität, d.h. mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt „ganz weit“ links im Koordinatensystem

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{-\infty} \to 0^-,$$

d.h. die Kurve nähert sich von unten her der Asymptote (hier die x-Achse). Sowie „ganz weit“ rechts

$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\infty} \to 0^+,$$

d.h. die Kurve nähert sich von oben her der Asymptote.

9.3.2 Verhalten in der Nähe der Polstelle (d.h. für $x \uparrow 0$ bzw. $x \downarrow 0$)

Wieder mit der umgekehrten Proportionalität, d.h. mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt für die Annäherung von links

$$x \uparrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{0^-} \to -\infty,$$

sowie für die Annäherung von rechts

$$x \downarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{0^+} \to \infty.$$

Links bzw. rechts von der Polstelle wird die Kurve also nach unten bzw. nach oben „gerissen“. Man nennt dies einen Pol mit VZW (Vorzeichenwechsel), weil die y-Werte links und rechts vom Pol nicht dasselbe Vorzeichen haben.

Mit der umgekehrten Proportionalität im Quadrat, d.h. mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt für die Annäherung von links

$$x \uparrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} \to \infty,$$

sowie für die Annäherung von rechts

$$x \downarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} \to \infty.$$

Sowohl links wie auch rechts von der Polstelle wird die Kurve also nach oben „gerissen“. Man nennt dies einen Pol ohne VZW (Vorzeichenwechsel), weil die y-Werte links und rechts vom Pol dasselbe Vorzeichen haben.

10 Differenzialrechnung

10.1 Definitionen

10.1.1 Differenzenquotient (Steigung der Sekante)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

10.1.2 Differenzialquotient (Steigung der Tangente)

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

10.2 Höhere Ableitungen

10.2.1 Wachstumsverhalten und Extrema

- Mit der ersten Ableitung f' kann man Aussagen machen über das Wachstumsverhalten des Graphen der Funktion f. Dort wo $f'(x)=0$ gilt, liegt ein kritischer Punkt x_k von f vor, d.h. dort ist die Tangente an die Kurve waagrecht.
- Mit der zweiten Ableitung f'' muss man überprüfen, ob bei dem kritischen Punkt tatsächlich ein Extremum, d.h. für $f''(x_k)>0$ ein Minimum oder für $f''(x_k)<0$ ein Maximum vorliegt. Für $f''(x_k)=0$ liegt ein Terrassenpunkt vor, siehe z.B. die Funktion f mit $f(x)=x^3$.

10.2.2 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

- Mit der zweiten Ableitung f'' kann man Aussagen machen über das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f. Dort wo $f''(x)=0$ gilt, liegt ein kritischer Punkt x_k von f' vor, d.h. dort hat die Kurve keine Krümmung und es handelt sich möglicherweise um einen Wendepunkt.
- Mit der dritten Ableitung f''' muss man überprüfen, ob bei dem kritischen Punkt tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, es muss dort $f'''(x_k)\neq 0$ gelten.
- Ein Terassenpunkt (auch Sattelpunkt genannt) ist nichts anderes als ein Wendepunkt mit einer waagrechten Wendetagente, d.h. im Wendepunkt ist die Tangente an die Kurve waagrecht.

10.2.3 Kriterien

Funktion	Graph der Funktion	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
Schnittpunkte mit x-Achse	Nullstellen	$=0$			
Wachstumsverhalten	wachsend		>0		
	fallend		<0		
Extremalstelle	Minimum		$=0$	>0	
	Maximum		$=0$	<0	
Krümmungsverhalten	linksgekrümmt (konvex)			>0	
	rechtsgekrümmt (konkav)			<0	
Wendepunkt	mit beliebiger Steigung		$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$
	Terrassenpunkt (Sattelpunkt)		$=0$	$=0$	$\neq 0$

10.3 Regeln und Ableitungen

10.3.1 Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$	Regel	
$\alpha \cdot u(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot u'(x)$	Faktorregel	
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	Summenregel	
$\alpha \cdot u(x) + \beta \cdot v(x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot u'(x) + \beta \cdot v'(x)$	Linearkombination	
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i(x) \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i'(x)$	Linearkombination	
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	Produktregel	
$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$	$f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)+$ $f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots +$ $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n'(x)$	Produktregel	
$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$	Kehrwertregel	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$	Quotientenregel	
$(g \circ h)(x) = g(h(x))$	$(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	Kettenregel	
$g^{-1}(x) \qquad g'(x) \neq 0$	$\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(x)}$	Umkehrfunktion	

10.3.2 Ableitungen einiger Funktionen

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$	
$c \qquad c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	
$mx \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	m	$\mathbb{R}$	
$x^n \qquad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$x^z \qquad z \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$z \cdot x^{z-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	
$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \qquad a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$	$\mathbb{R}$	
$e^x = \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$e^x = \exp(x)$	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	
$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	

10.3.3 Ableitungen weiterer Funktionen

Mit N_g ist die Menge der Nullstellen einer Funktion g gemeint.

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$	
$abs(x) = \|x\|$	$\mathbb{R}$	$\frac{\|x\|}{x} = \frac{x}{\|x\|} = \text{sgn}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$a^x \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\mathbb{R}$	
$\log_a(x) \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus N_{cos}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus N_{cos}$	
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\mathbb{R} \setminus N_{sin}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus N_{sin}$	
$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$	$[-1;1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	
$\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$	$[-1;1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	
$\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$\cot^{-1}(x) = \text{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	

10.3.4 Ableitungen der hyperbolischen Funktionen

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$\mathbb{R}$	
$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	

10.3.5 Ableitungen der Areafunktionen

$\text{arsinh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	
$\text{arcosh}(x)$	$[1;\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1;\infty[$	
$\text{artanh}(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1;1[$	
$\text{arcoth}(x)$	$\mathbb{R} \setminus [-1;1]$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} \setminus [-1;1]$	

11 Funktionendiskussion

11.1 Definition

Eine Funktion f diskutieren heisst:

1. Rechnerisch alle wichtigen Eigenschaften der Funktion bestimmen, wie z.B. Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Asymptoten, Minima und Maxima, usw. Siehe dazu den folgenden Abschnitt.

2. All diese Eigenschaften in ein Koordinatensystem übertragen und den Graphen von f zeichnen.

3. Falls man zuwenig Informationen hat, kann man weitere x-Werte in die Funktion einsetzen und dadurch die zugehörigen y-Werte berechnen. Diese Punkte kann man dann ebenfalls im Koordinatensystem einzeichnen.

11.2 Vorgehen

11.2.1 Für alle Funktionen

- Nullstellen, d.h. Schnittpunkt(e) mit der x-Achse bestimmen, falls vorhanden.

- Schnittpunkt mit der y-Achse d.h. $f(0)$ berechnen, wobei es maximal **einen** solchen gibt.

- Definitionsbereich D bestimmen, d.h. alle x-Werte welche man in die Funktion einsetzen kann, vergleiche dazu den wichtigen Abschnitt 4.2 über Definitionsbereiche beim Lösen von Gleichungen.

- Wertebereich W bestimmen, d.h. alle y-Werte welche die Funktion zurückgeben kann.

Für die Grundfunktionen im Abschnitt 8 sind jeweils D und W angegeben.

11.2.2 Quadratische und kubische Funktionen (Polynomfunktionen)

- Für quadratische Funktionen kann man z.B. mit Hilfe der Scheitelpunktform das in jedem Fall vorhandene Minimum oder Maximum bestimmen. Einen Wendepunkt haben diese Funktionen nicht.

- Bei kubischen Funktionen, vergleiche Abschnitt 8.5, oder allgemein Polynomfunktionen vom Grad $n \geq 3$, vergleiche Abschnitt 8.6, sind alle Extrema sowie Wendepunkte zu bestimmen. Ausserdem die Asymptote.

11.2.3 Gebrochenrationale Funktionen

Vergleiche die Abschnitte 8.3.2 und 8.7. Folgendes ist zu bestimmen, falls vorhanden:

- Extrema, d.h. Minima und/oder Maxima

- Wendepunkt(e)

- Senkrechte Asymptote(n), d.h. die Polstelle(n)

- Die Asymptote $a(x)$, d.h. jene für $x \to \pm\infty$

- Mit Hilfe von $d(x)$ kann man auf ober- oder unterhalb entscheiden

Gebrochenlineare Funktionen, vergleiche die Abschnitte 8.3.2 und 8.8, haben weder Extrema noch Wendepunkte, dafür eine waagrechte Asymptote.

11.2.4 Exponentielle und logarithmische Funktionen

Solche Funktionen weisen weder Extrema noch Wendepunkte auf, vergleiche die beiden Abschnitte 8.9 und 8.10. Folgendes ist zu bestimmen:

- Waagrechte Asymptote bei den Exponentialfunktionen, vergleiche den Abschnitt 9.1.2.
- Senkrechte Asymptote bei den logarithmischen Funktionen, vergleiche den Abschnitt 9.1.1.

11.2.5 Trigonometrische Funktionen

Vergleiche die Abschnitte 6.3 und 8.11, sowie die letzten drei Zeilen in der Tabelle des Abschnitts 4.13.

- Periodische Extrema bei den Sinus- und Cosinusfunktionen.
- Senkrechte Asymptoten bei den Tangens- und Cotangensfunktionen.

11.2.6 Arkusfunktionen

Bei diesen Funktionen sind im Wesentlichen nur die eingeschränkten Definitions- und Wertebereiche interessant, vergleiche den Abschnitt 8.12.

11.3 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben geht es darum eine Grösse zu optimieren, d.h. Minimieren oder Maximieren. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Ausgangsgleichung für die zu optimierende Grösse aufstellen. Man spricht auch von Hauptbedingung oder Zielfunktion. Das Problem ist meist, dass diese Funktion von zwei oder noch mehr Variablen abhängt, d.h. man hat eine Funktion $f(x, y, \ldots)$, welche man mit unseren Kenntnissen nicht ableiten kann.

2. Eine oder mehrere Nebenbedingung(en) aufstellen mit dem Ziel die Ausgangsgleichung auf eine Variable zu reduzieren. D.h. man hat dann $f(x)$ und kann somit die bekannten Ableitungsregeln anwenden.

3. Die erste Ableitung $f'(x)$ bilden und gleich Null setzen liefert den kritischen Punkt, d.h. jenen wo die Steigung der Tangente an die Kurve gleich Null ist.

4. Mit Hilfe der zweiten Ableitung $f''(x)$ entscheiden, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt, indem man den x-Wert des kritischen Punktes dort einsetzt und auf kleiner oder grösser Null prüft.

5. Die optimale, d.h. minimale oder maximale Grösse durch Einsetzen in der Ausgangsgleichung berechnen.

12 Integralrechnung

12.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

12.1.1 Unbestimmtes Integral (Definition)

Ist f eine Funktion mit einem Intervall I als Definitionsbereich, dann heisst eine differenzierbare Funktion F mit demselben Intervall I als Definitionsbereich eine Stammfunktion von f, wenn für alle $x \in I$

$$F'(x) = f(x)$$

gilt. Die Funktion f heisst dann integrierbar. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, denn eine additive Konstante verschwindet beim Differenzieren. Siehe den Abschnitt 12.1.3 für ein Beispiel.

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen $F + c$ heisst unbestimmtes Integral der Funktion f und wird als

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

geschrieben, bzw. als „Integral über $f(x)\,dx$" ausgesprochen. Das Zeichen $\int$ heisst Integralzeichen und $f(x)$ der Integrand. Die Variable x nennt man Integrationsvariable und c die Integrationskonstante.

12.1.2 Stammfunktionen (eine Auswahl)

$f(x)$		D_f	$F(x)$		D_F
0		$\mathbb{R}$	c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
m	$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	mx		$\mathbb{R}$
x^n	$n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$		$\mathbb{R}$
x^z	$z \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{z+1} \cdot x^{z+1}$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$		$\mathbb{R}^+$
$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$	$a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{1}{i+1} \cdot x^{i+1}$		$\mathbb{R}$
$e^x = \exp(x)$		$\mathbb{R}$	$e^x = \exp(x)$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^+$	$\ln(x)$		$\mathbb{R}^+$
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\ln(\lvert x \rvert)$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\cos(x)$		$\mathbb{R}$	$\sin(x)$		$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$		$\mathbb{R}$
$\frac{\lvert x \rvert}{x} = \frac{x}{\lvert x \rvert} = \operatorname{sgn}(x)$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$abs(x) = \lvert x \rvert$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
a^x	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$		$\mathbb{R}$

12.1.3 Unbestimmtes Integral (Beispiel)

Für

$$f(x) = 4\,x^2 + \cos(x) + 5$$

z.B. gilt auf dem Intervall $I = D_F = D_f = \mathbb{R}$ sowie mit der Summen-, Faktor- und Potenzregel

$$F(x) = 4\,\frac{1}{3}x^3 + \sin(x) + 5\,x + c$$

für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$, denn es gilt in jedem Fall $F'(x) = f(x)$, unabhängig davon wie gross die additive Konstante c ist.

12.2 Bestimmtes Integral

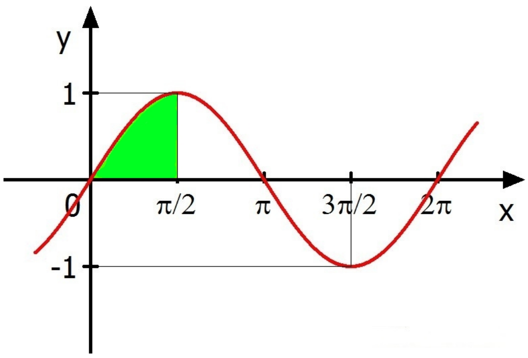
12.2.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn eine auf einem Intervall $I = [a, b]$ integrierbare Funktion f gegeben ist, kann man mit der zugehörigen Stammfunktion F das Gebiet (die „Fläche“) unter der Kurve zwischen der Untergrenze a und der Obergrenze b berechnen, siehe die Beispiele im Abschnitt 12.2.2. Das Gebiet berechnet sich durch

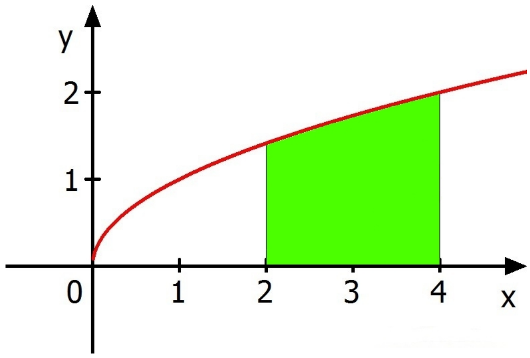
$$G = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

d.h. man bildet die Stammfunktion F, setzt die Grenzen b und a ein und bildet die Differenz $F(b) - F(a)$, deren Wert man das bestimmte Integral von f nennt. Der Hauptsatz liefert also den Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und bestimmten Integral einer Funktion f.

12.2.2 Berechnung Gebiet (Beispiele)



Beispiel 1: $f(x) = \sin(x)$



Beispiel 2: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

Beispiel 1: Für die Grenzen soll $a = 0$ sowie $b = \pi/2$ gelten und damit für das Gebiet

$$G = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos(0)) = 1$$

Beispiel 2: Für die Grenzen soll $a = 2$ sowie $b = 4$ gelten und damit für das Gebiet

$$G = \int_2^4 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\right]_2^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{2^3}\right) \approx 3.45$$

Diese Werte für das Gebiet G sind einheitenlos und beziehen sich auf das Einheitsquadrat, welches die Seitenlänge 1 und somit eine „Fläche“ von 1 hat. Falls die Kurve einer Funktion f unterhalb der x-Achse verläuft, können solche Gebiete auch negative Werte annehmen, weshalb man von einem Gebiet spricht und nicht von einer Fläche im geometrischen Sinne.

12.3 Integrationsregeln

12.3.1 Analogie zu den Ableitungsregeln

$f(x)$	$F(x)$	Regel
$\alpha \cdot u(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$	$\int_a^b \alpha \cdot u(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b u(x)\,dx$	Faktorregel
$u(x) + v(x)$	$\int_a^b (u(x) + v(x))\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx$	Summenregel
$u(x) \cdot v'(x)$	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx$	Partielle Integration

Die Faktor- und Summenregel sind analog zu den Ableitungsregeln im Abschnitt 10.3.1 und die Regel für die partielle Integration leitet sich aus der Produktregel

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

aus demselben Abschnitt her.

12.3.2 Substitutionsmethode

$f(x)$	$F(x)$	Regel
$u\,[v(x)] \cdot v'(x) \qquad z = v(x)$	$\int_a^b u\,[v(x)] \cdot v'(x)\,dx = \int_a^b u(z)\,dz$	Substitutionsmethode
$[v(x)]^n \cdot v'(x) \qquad n \neq -1$	$\int_a^b [v(x)]^n \cdot v'(x)\,dx = \frac{[v(x)]^{n+1}}{n+1} + c$	1. Spezialfall
$\frac{v'(x)}{v(x)}$	$\int_a^b \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)\,dx = \ln\lvert v(x)\rvert + c$	2. Spezialfall

Die Herleitung der Substitutionsmethode erfolgt mithilfe der Kettenregel aus Abschnitt 10.3.1. Man verwendet die Substitution $z = v(x)$, d.h. die innere Funktion $v(x)$ wird substituiert durch eine Variable z, wodurch man das einfachere Integral

$$\int_a^b u(z)\,dz$$

lösen kann. Beim 1. Spezialfall gilt

$$u(z) = z^n,$$

d.h. die äussere Funktion u ist eine Potenzfunktion und kann daher mithilfe der Potenzregel integriert werden. Beim 2. Spezialfall gilt

$$u(z) = \frac{1}{z},$$

d.h. die äussere Funktion u ist eine ganzrationale Funktion und für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt gemäss Ableitungsregeln im Abschnitt 10.3.1

$$[\ln(|z|)]' = \frac{1}{z}.$$